Compito 19 Luglio 2016

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

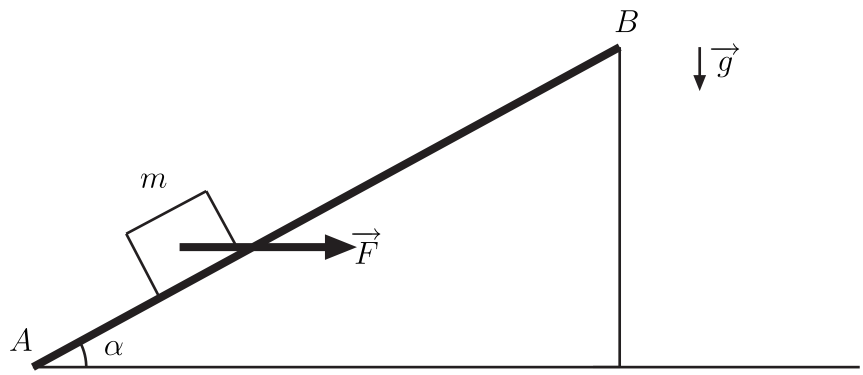
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Anno Accademico 2015-2016

Compito di Fisica Generale I per matematici
19 Luglio 2016

R. Bonciani, P. Dore

Esercizio 1

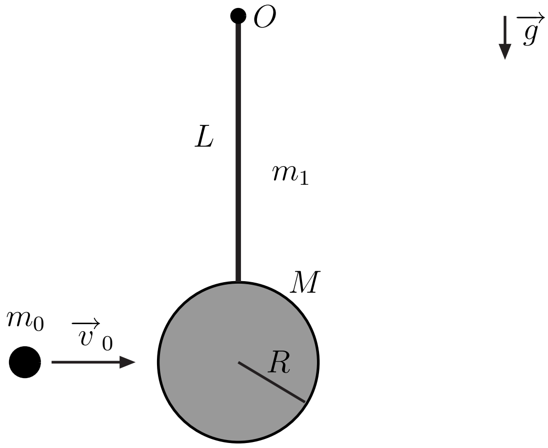


Un corpo di massa m si muove in salita lungo un binario inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale (vedi figura). Fra binario e corpo m c'è attrito dinamico, con coefficiente μ_d. Il corpo può essere approssimato ad un punto materiale. In A il corpo ha velocità v_A, diretta lungo il tratto AB, verso B. Lungo tutto il tratto AB il corpo è soggetto alla forza $\vec{F}$, orizzontale e in modulo costante. Nel punto B il binario finisce (la forza $\vec{F}$ cessa di agire) e il corpo prosegue il suo moto nel vuoto. Si determinino:

1. Il modulo della velocità v_B in B.
2. La quota massima h_{max} raggiunta dal corpo.
3. L'energia cinetica del corpo nel momento in cui tocca il suolo.

Dati numerici: $m = 15$ kg, $\alpha = \pi/6$, $|\vec{F}| = 200$ N, $\mu_d = 0.2$, $v_A = 10$ m s^{-1}, AB = 18 m.

Esercizio 2



Un sistema rigido è costituito da un'asta omogenea di massa m_1 e lunghezza L saldata ad una sua estremità ad un disco omogeneo di raggio R e massa M. Il sistema ha l'altra estremità dell'asta incernierata (senza attrito) nel punto O ed è soggetto alla forza di gravità. Il **pendolo composto** così costituito è quindi libero di oscillare attorno ad O su un piano verticale. All'istante $t = 0$ il sistema è a riposo nella posizione di equilibrio stabile e un proiettile di massa m_0 e velocità v_0 orizzontale lo colpisce elasticamente sul disco, all'altezza del suo centro. Calcolare

1. l'angolo massimo θ_{max} rispetto alla verticale raggiunto dal sistema dopo l'urto;
2. il periodo delle piccole oscillazioni del moto del pendolo composto dopo l'urto;
3. la velocità del proiettile (in modulo direzione e verso) subito dopo l'urto.

Dati numerici: $m_0 = 200$ g, $m_1 = 1$ kg, $M = 4$ kg, $L = 60$ cm, $R = 10$ cm, $|\vec{v}_0| = 5$ m s^{-1}.

Esercizio 3

Una mole di gas perfetto monoatomico inizialmente in equilibrio nello stato A, alla temperatura $T_A = 500°$K e volume V_A, compie una trasformazione adiabatica reversibile che lo porta nello stato B, con temperatura $T_B = T_A/2 = 250°$K. Tale trasformazione, è seguita da una trasformazione reversibile di equazione $pV^2 = cost$ che porta il gas nello stato C a temperatura $T_C = T_A$ e un volume $V_C = \sqrt{2}V_A$. Il gas compie infine un'isoterma reversibile che riporta il sistema nello stato iniziale A.

1. Disegnare il ciclo nel piano di Clapeyron.
2. Calcolare segno e valore del lavoro nelle tre trasformazioni e quindi il lavoro totale nel ciclo.

Soluzione Esercizio 1

1. Consideriamo un SdR per il quale l'asse delle x coincide col piano inclinato, con direzione positiva verso B, e l'asse delle y è perpendicolare. Sia A l'origine del SdR. Il moto del punto materiale avviene lungo le x. Scrivendo il Secondo Principio della Dinamica lungo le x si ha:

$$m\ddot{x} = F\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu_d N\,, \tag{1}$$

con le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} \dot{x}(t=0) &= v_A\,, \quad (2)\\ x(t=0) &= 0\,. \quad (3) \end{aligned}$$

La reazione normale è data da:

$$N = mg\cos\alpha + F\sin\alpha = 227.44 \text{ N}\,. \tag{4}$$

Quindi l'equazione del moto diventa:

$$\ddot{x} = a\,, \tag{5}$$

con

$$a = \frac{F}{m}\cos\alpha - g\sin\alpha - \mu_d\left(g\cos\alpha + \frac{F}{m}\sin\alpha\right) = 3.61 \text{ m s}^{-2}\,, \tag{6}$$

che integrata dà:

$$\dot{x}(t) = v_A + at\,, \tag{7}$$

e

$$x(t) = v_A t + \frac{1}{2}at^2\,. \tag{8}$$

In B il punto materiale giunge a t_B, soluzione positiva dell'equazione del secondo ordine:

$$\mathrm{AB} = v_A t_B + \frac{1}{2}at_B^2\,, \tag{9}$$

ovvero

$$t_B^2 + \frac{2v_A}{a}t_B - \frac{2\mathrm{AB}}{a} = 0\,. \tag{10}$$

Si ha

$$t_B = -\frac{v_A}{a} + \sqrt{\frac{v_A^2}{a^2} + \frac{2\mathrm{AB}}{a}} = 1.43 \text{ s}\,. \tag{11}$$

La velocità in B sarà data da

$$v_B = v_A + at_B = 15.16 \text{ m s}^{-1}\,. \tag{12}$$

2. Da quando m giunge in B in poi si può utilizzare la conservazione dell'energia meccanica per determinare h_{max}.

   La quota di B è:

$$h_B = \mathrm{AB} \sin\alpha = 9.0 \text{ m} \,. \tag{13}$$

   L'energia meccanica in B sarà quindi (poniamo lo zero dell'energia potenziale al livello di A):

$$E_B = mgh_B + \frac{1}{2} m v_B^2 \,. \tag{14}$$

   Il moto del punto lundo l'orizzontale è un moto uniforme, mentre quello lungo la verticale è uniformemente accelerato. Quando il punto materiale giunge alla quota massima la componente verticale della velocità si annulla e rimane quindi solo la componente orizzontale, pari a $v_B \cos\alpha$. Quindi

$$E_{max} = mgh_{max} + \frac{1}{2} m v_B^2 \cos^2\alpha \,. \tag{15}$$

   Ponendo $E_B = E_{max}$ si ottiene

$$h_{max} = h_B + \frac{v_B^2}{2g} \sin^2\alpha = 11.93 \text{ m} \,. \tag{16}$$

3. Quando il punto tocca terra la sua energia potenziale sarà nulla. Quindi possiamo ottenere la sua energia cinetica sempre dalla conservazione dell'energia:

$$T_0 = E_B = mgh_B + \frac{1}{2} m v_B^2 = 3048.04 \text{ J} \,. \tag{17}$$

Soluzione Esercizio 2

1. Le possibili reazioni vincolari sono concentrate nel punto O. Durante l'urto la forza di gravità non essendo impulsiva non dà effetti. Se scegliamo come centro di riduzione il punto O, potremo utilizzare il fatto che rispetto ad O il momento angolare si conserva durante l'urto. Inoltre si conserva l'energia cinetica, visto che l'urto è elastico.

   Troviamo la velocità angolare del pendolo composto subito dopo l'urto.

   Il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse perpendicolare al piano in cui avviene il moto e passante per O è dato dalla somma del momento d'inerzia della sbarretta e del disco:

$$I_0 = I_0^{sbarretta} + I_0^{disco} \,, \tag{18}$$

   dove

$$I_0^{sbarretta} = \frac{1}{3} m_1 L^2 = 0.12 \text{ kg m}^2 \,, \tag{19}$$

$$I_0^{disco} = \frac{1}{2} M R^2 + M(L+R)^2 = 1.98 \text{ kg m}^2 \,, \tag{20}$$

e dove il momento d'inerzia del disco è stato calcolato utilizzando il teorema di Huygens-Steiner. Si ha:

$$I_0 = 2.1 \text{ kg m}^2 . \tag{21}$$

La conservazione del momento angolare rispetto ad O ci dice che:

$$m_0 v_0 (L+R) = I_0 \dot{\theta}_0 + m_0 v_1 (L+R) , \tag{22}$$

dove abbiamo preso θ positivo in senso anti orario, v_0 positivo verso destra, e dove abbiamo indicato con v_1 la velocita' del proiettile subito dopo l'urto; questa sarà diretta sempre orizzontalmente, per la simmetria del problema, ma non ne conosciamo ancora il verso.

L'equazione (22) ha due incognite, v_1 e $\dot{\theta}$. Quindi abbiamo bisogno di un'altra equazione per risolvere il problema: la conservazione dell'energia.

La conservazione dell'energia ci dà:

$$\frac{1}{2} m_0 v_0^2 = \frac{1}{2} m_0 v_1^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_0^2 . \tag{23}$$

Dall'Eq. (22) si ricava:

$$v_1 = v_0 - \frac{I_0}{m_0 (L+R)} \dot{\theta}_0 , \tag{24}$$

che sostituita nella (23) dà:

$$\begin{aligned} v_0^2 &= \left(v_0 - \frac{I_0}{m_0(L+R)} \dot{\theta}_0 \right)^2 + \frac{I_0}{m_0} \dot{\theta}_0^2 , &(25) \\ &= v_0^2 - 2 \frac{v_0 I_0}{m_0(L+R)} \dot{\theta}_0 + \frac{I_0^2}{m_0^2 (L+R)^2} \dot{\theta}_0^2 + \frac{I_0}{m_0} \dot{\theta}_0^2 , &(26) \end{aligned}$$

ovvero:

$$\dot{\theta}_0 \left\{ \dot{\theta}_0 \left[\frac{I_0}{m_0} \left(1 + \frac{I_0}{m_0 (L+R)^2} \right) \right] - 2 \frac{v_0 I_0}{m_0 (L+R)} \right\} = 0 . \tag{27}$$

L'Eq. (27) ammette una soluzione non fisica, $\dot{\theta}_0 = 0$, e un'altra fisica:

$$\dot{\theta}_0 = 2 \frac{v_0 m_0 (L+R)}{I_0 + m_0 (L+R)^2} = 0.64 \text{ s}^{-1} . \tag{28}$$

Subito dopo l'urto, il pendolo composto si muove liberamente sotto l'azione della forza di gravità, che è conservativa. Per calcolare l'ampiezza massima delle oscillazioni indotte dall'urto, quindi, si può utilizzare la conservazione dell'energia meccanica applicata al pendolo. All'istante $t = 0$ l'energia potenziale del pendolo la prendiamo nulla, mentre la sua energia cinetica è:

$$T_0 = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_0^2 . \tag{29}$$

L'ampiezza massima sarà determinata dall'avere energia cinetica nulla. Quindi l'energia meccanica si sarà tramutata tutta in energia potenziale. Per calcolare l'energia potenziale del pendolo composto possiamo sommare le energie potenziali dei due pezzi che compongono il sistema. Per l'asta abbiamo:

$$\Delta V_{asta} = m_1 g \Delta h_{asta} \,, \tag{30}$$

dove

$$\Delta h_{asta} = \frac{L}{2}(1 - \cos\theta_{max}) \,. \tag{31}$$

Per il disco abbiamo:

$$\Delta V_{disco} = Mg(L + R)(1 - \cos\theta_{max}) \,. \tag{32}$$

In totale:

$$\frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_0^2 = \left[m_1 g \frac{L}{2} + Mg(L + R) \right] (1 - \cos\theta_{max}) \,, \tag{33}$$

ovvero

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{I_0 \dot{\theta}_0^2}{g\left[m_1 L + 2M(L + R)\right]} \,, \tag{34}$$

e infine:

$$\theta_{max} = 0.168 \text{ rad} = 9.6^\circ \,. \tag{35}$$

2. L'equazione del moto del pendolo composto dopo l'urto è:

$$I_0 \ddot{\theta} = -(m_1 + M) g L_G \sin\theta \,, \tag{36}$$

dove L_G è la distanza da O del centro di massa del sistema[1]:

$$L_G = \frac{1}{m_1 + M} \left[m_1 \frac{L}{2} + M(L + R) \right] = 0.62 \text{ m} \,. \tag{37}$$

Siccome $\theta_{max} = 0.168$ rad, l'approssimazione delle piccole oscillazioni è giustificata. Quindi $\sin\theta \simeq \theta$ e l'eq del moto diventa quella dell'oscillatore armonico:

$$\ddot{\theta} + \frac{(m_1 + M) g L_G}{I_0} \theta = 0 \,. \tag{38}$$

Il periodo delle piccole oscillazioni è quindi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{(m_1 + M) g L_G}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{g\left[m_1 \frac{L}{2} + M(L + R)\right]}} = 1.65 \text{ s} \,. \tag{39}$$

[1]Nota che il cm sta all'interno del disco, a 2 cm dal bordo, sul prolungamento della sbarretta.

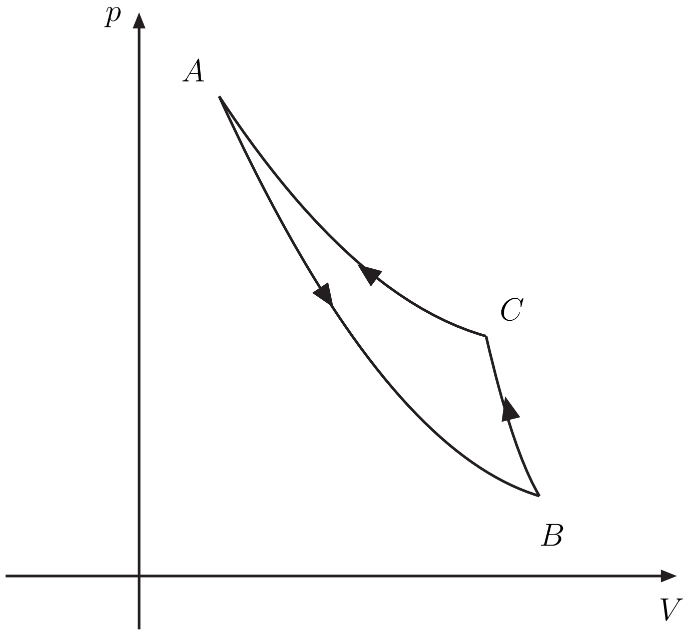
3. Utilizzando l'Eq. (28) si può trovare v_1 dalla (24):

$$v_1 = v_0 \left(1 - \frac{2I_0}{I_0 + m_0(L+R)^2} \right) = -4.55 \text{ m s}^{-1} \,. \tag{40}$$

   Dall'Eq. (40) si capisce che v_1 può essere positiva o negativa a seconda del valore del momento d'inerzia del pendolo composto I_O rispetto al termine $m_0(L+R)^2$. Si ha infatti che $v_1 > 0$ se $I_0 < m_0(L+R)^2$ e $v_1 < 0$ viceversa. Nel nostro caso si ha $v_1 < 0$, cioè il proiettile rimbalza sul disco e torna indietro, comunicando parte della sua energia cinetica al pendolo composto, che comincia ad oscillare.

Soluzione Esercizio 3

1. Il ciclo nel piano di Clapeyron è:



2. Lungo l'adiabatica AB si ha $\not{d}Q = 0$ e quindi per il Primo Principio:

$$L_{AB} = U(A) - U(B) = \tilde{c}_V(T_A - T_B) = \frac{3}{2}R(T_B - T_A) = 3116.25 \text{ J} \,, \tag{41}$$

   dove abbiamo indicato con $\tilde{c}_V$ il calore specifico molare a volume costante.

   La trasformazione BC è data dalla curva

$$p = \frac{cost}{V^2} \,, \tag{42}$$

   dove la costante può essere determinata imponendo che la curva passi per B:

$$cost = p_B V_B^2 \,. \tag{43}$$

Il lavoro L_{BC} sarà dato dal seguente integrale:

$$L_{BC} = \int_{V_B}^{V_C} p\, dV = p_B V_B^2 \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V^2} = p_B V_B^2 \left(-\frac{1}{V_C} + \frac{1}{V_B} \right) = p_B V_B \left(1 - \frac{V_B}{V_C} \right) . \tag{44}$$

Utilizzando l'equazione di stato del gas perfetto in B ($p_B V_B = RT_B$) si ottiene

$$L_{BC} = RT_B \left(1 - \frac{V_B}{V_C} \right) . \tag{45}$$

Per determinare il rapporto V_B/V_C consideriamo il fatto che si ha

$$p_B V_B^2 = p_C V_C^2 , \tag{46}$$

e quindi

$$\frac{p_B V_B^2}{p_C V_C^2} = 1 . \tag{47}$$

D'altra parte, le equazioni di stato danno

$$p_B V_B = RT_B , \qquad p_C V_C = RT_C = 2RT_B . \tag{48}$$

Quindi

$$1 = \frac{p_B V_B^2}{p_C V_C^2} = \frac{V_B\, RT_B}{V_C\, RT_C} = \frac{V_B}{2V_C} , \tag{49}$$

da cui

$$\frac{V_B}{V_C} = 2 . \tag{50}$$

Infine

$$L_{BC} = RT_B \left(1 - \frac{V_B}{V_C} \right) = -RT_B = -2077.5 \text{ J} . \tag{51}$$

L'ultimo tratto è costituito da una trasformazione isoterma. Quindi

$$L_{CA} = \int_{V_C}^{V_A} p\, dV = RT_A \log \left(\frac{V_A}{V_C} \right) = -RT_A \frac{1}{2} \log (2) = -1440.01 \text{ J} . \tag{52}$$

Il lavoto totale del ciclo quindi è:

$$L_{tot} = -401.26 \text{ J} . \tag{53}$$