Esame 20 Giugno 2019

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

Dipartimento di Matematica

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

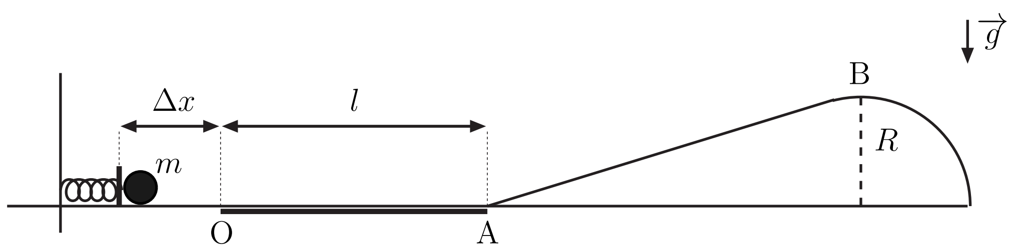
Anno Accademico 2018-2019

Esame 20 Giugno 2019

R. Bonciani e P. Dore

Esercizio 1

Un punto materiale di massa $m = 205$ g è appoggiato ad una molla di costante elastica $k = 15.33$ N/m. La molla è inizialmente compressa di una lunghezza Δx rispetto alla sua lunghezza a riposo, indicata con O in figura. Al tempo $t = 0$ la molla scatta e spinge il punto materiale. A partire da O, il punto materiale, non più in contatto con la molla, si muove su un piano orizzontale scabro di lunghezza $l = 50$ cm, caratterizzato da un coefficiente d'attrito $\mu_d = 0.3$. Al termine del piano orizzontale è posta una pista liscia composta da un piano inclinato raccordato ad un arco di circonferenza di raggio $R = 30$ cm.

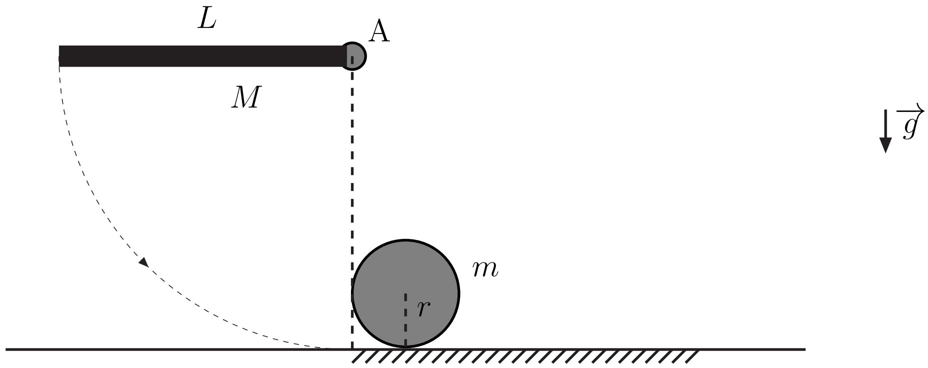


Determinare:

1. il valore minimo, Δx_{min}, della compressione iniziale della molla affinché il punto materiale giunga nel punto B;
2. il valore massimo, Δx_{max}, della compressione iniziale della molla affinché il punto materiale giunga nel punto B, essendo sempre rimasto in contatto con la guida;
3. il tempo impiegato dal punto materiale per percorrere il tratto OA, dato $\Delta x_0 = 38$ cm.

Esercizio 2

Si consideri il sistema in cui una sbarra omogenea di lunghezza $L = 50$ cm e massa $M = 1$ kg sia incernierata nell'estremo A e sia inizialmente posta a riposo in posizione orizzontale. La sbarra viene lasciata libera di ruotare (senza attrito) sotto l'effetto della forza di gravità. Una sferetta di raggio $r = 5$ cm e massa $m = 300$ g è posta su un piano orizzontale scabro in modo che sia urtata dalla sbarra in corrispondenza della sua posizione verticale. A seguito dell'urto la sbarra si ferma.



1. Calcolare modulo, direzione e verso del vettore velocità angolare ω_0 della sbarra nell'istante immediatamente precedente l'urto con la sferetta.

2. Calcolare la velocità v_0 del centro di massa della sferetta un istante dopo l'urto. (NB. durante l'urto ricordarsi di trascurare le forze che non sono impulsive).

3. Supponiamo che dall'istante immediatamente successivo all'urto la sferetta cominci a muoversi di moto di rotolamento puro. Calcolare l'energia cinetica della sfera.

Esercizio 3

Quattro moli di gas perfetto monoatomico sono inizialmente nello stato di equilibrio A, con $V_A = 2$ l e $p_A = 1$ Atm. Il gas compie la trasformazione reversibile descritta da

$$p = \frac{p_A}{2}\left(1 + \frac{V}{V_A}\right) , \tag{1}$$

fino a portarsi nello stato B, con $V_B = 2V_A$.

Calcolare:

1. il lavoro compiuto dal gas nella trasformazione $A \to B$;

2. il calore assorbito durante tale trasformazione;

3. la variazione di entropia.

Soluzione esercizio 1

1. Imponiamo che il punto arrivi fermo in B. Per il teorema delle forze vive si ha:

$$L_{OB} = T_B - T_O = -T_O = -\frac{1}{2}k\Delta x^2_{min}\,. \tag{2}$$

D'altra parte

$$L_{OB} = -\mu_d mgl + V_A - V_B = -\mu_d mgl - mgR\,. \tag{3}$$

In totale:

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2_{min} = \mu_d mgl + mgR\,, \tag{4}$$

e quindi

$$\Delta x_{min} = \sqrt{\frac{2mg}{k}(\mu_d l + R)} = 34.4\text{cm} \tag{5}$$

2. Per trovare Δx_{max}, bisogna che il punto m giunga in B con una certa velocità, ma con reazione vincolare non nulla. Se v_B è la velocità con cui m arriva in B, si ha, per il teorema delle forze vive

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}k\Delta x^2 = -\mu_d mgl - mgR\,. \tag{6}$$

La seconda equazione che ci serve la prendiamo dal Secondo Principio proiettato sulla direzione normale al vincolo circolare. Chiamando θ l'angolo al centro fra la verticale e un generico punto sulla circonferenza, si ha

$$R_n - mg\cos\theta = -m\frac{v_B^2}{R}\,, \tag{7}$$

dove R_n è la reazione normale al vincolo. Imponendo $R_n \geq 0$ in B (cioè in $\theta = 0$) , si ottiene il valore massimo di v_B affinché m rimanga in contatto con il vincolo. Utilizzando l'altra equazione di trova, di conseguenza, Δx_{max}.

$$R_n = mg\cos\theta - m\frac{v_B^2}{R} \geq 0\,, \tag{8}$$

quindi

$$v^2_{B,max} = Rg = 2.943\ \text{m}^2\text{s}^{-2}\,. \tag{9}$$

Dalla (6) si ha infine

$$\Delta x_{max} = \sqrt{\frac{2mg}{k}\left(\frac{3}{2}R + \mu_d l\right)} = 39.7\ \text{cm}\,. \tag{10}$$

3. Il punto m parte da O con velocità

$$v_O = \Delta x_0\sqrt{\frac{k}{m}} = 3.29\ \text{m/s}\,. \tag{11}$$

Il moto da O ad A è uniformemente accelerato, con accelerazione $a = -\mu_d g$, tale che

$$l = v_O t_{OA} - \frac{1}{2}\mu_d g t_{OA}^2 \,, \tag{12}$$

da cui si ricava

$$t_{OA} = \frac{v_O \pm \sqrt{v_O^2 - 2\mu_d g l}}{\mu_d g} \,. \tag{13}$$

Entrambe le soluzioni sono "possibili". Le due soluzioni possibili provengono dal fatto che $x(t)$ è una parabola e se l'accelerazione esistesse sempre, ci sarebbero due tempi a cui m passa per l (sempre che l sia minore della massima lunghezza che compete all'accelerazione a). Il problema fisico, però, ci dice che l'accelerazione, essendo dovuta all'attrito, scompare se m si ferma. Dobbiamo quindi selezionare il primo tempo (cioè il tempo minore):

$$t_{OA} = \frac{v_O - \sqrt{v_O^2 - 2\mu_d g l}}{\mu_d g} = 0.164 \; s \,. \tag{14}$$

Alternativamente si può usare direttamente il teorema dell'impulso. Si ha

$$-\int_0^t \mu_d m g \, dt = m v_A - m v_O \,, \tag{15}$$

e quindi

$$t_{OA} = -\frac{v_A - v_O}{\mu_d g} = 0.164 \; s \,, \tag{16}$$

dove per il thm delle forze vive si ha

$$v_A = \sqrt{v_O^2 - 2\mu_d g l} \,. \tag{17}$$

Soluzione esercizio 2

1. Per trovare ω_0 utilizziamo la conservazione dell'energia.

$$\frac{1}{2} I_A \omega_0^2 = M g \frac{L}{2} \,, \tag{18}$$

dove

$$I_A = M \frac{L^2}{3} \,, \tag{19}$$

da cui

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{L}} = 7.67 \text{ s}^{-1} \,. \tag{20}$$

La direzione di ω_0 è perpendicolare al piano del moto. Il verso è tale che il vettore ω_0 sia uscente dallo stesso piano.

2. Nell'urto in generale non si conserva nessuna quantità, essendo un urto vincolato. Però siccome le reazioni vincolari impulsive sono sicuramente concentrate nel pernio A, si può utilizzare la seconda cardinale impulsiva centrata in A. Rispetto ad A, il momento delle forze esterne si annulla e quindi il momento della quantità di moto subito prima e subito dopo l'urto è lo stesso:

$$I_A \omega_0 = m v_0 (L - r)\,. \tag{21}$$

Si ricava quindi la velocità v_0:

$$v_0 = \frac{I_A \omega_0}{m(L-r)} = \frac{M}{m}\frac{L}{(L-r)}\sqrt{\frac{gL}{3}} = 4.73 \text{ m s}^{-1}\,. \tag{22}$$

3. Se dal momento immediatamente successivo all'urto la sferetta si muove di rotolamento puro, si ha

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2\,, \tag{23}$$

dove

$$I_{cm} = \frac{2}{5} m r^2\,. \tag{24}$$

Trattandosi di rotolamento puro, si ha una relazione fra ω e v_0:

$$v_0 = r\omega\,. \tag{25}$$

Quindi

$$T = \frac{1}{2}(mr^2 + I_{cm})\omega^2 = \frac{7}{10} m r^2 \omega^2 = \frac{7}{10} m v_0^2 = 4.7 \text{ J}\,. \tag{26}$$

Soluzione esercizio 3

1. Siccome si tratta di una trasformazione reversibile si può usare

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_{V_A}^{V_B} p\,dV = \frac{p_A}{2}\int_{V_A}^{V_B}\left(1 + \frac{V}{V_A}\right) dV = \frac{p_A}{2}(V_B - V_A) + \frac{p_A}{4V_A}(V_B^2 - V_A^2) \\ &= \frac{5}{4} p_A V_A = 2.5 \text{ l Atm} = 253.25 \text{ J}\,. \end{aligned} \tag{27}$$

2. Per calcolare il calore assorbito sfruttiamo il Primo Principio e quindi abbiamo bisogno delle temperature in A e in B.

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = 6.1 \text{ K}\,. \tag{28}$$

Per T_B si ha

$$T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{2V_A}{nR}\frac{p_A}{2}\left(1 + \frac{V_B}{V_A}\right) = 3T_A = 18.3 \text{ K}\,. \tag{29}$$

Allora

$$Q_{AB} = L_{AB} + \Delta U_{AB} = \frac{5}{4} p_A V_A + n c_V \Delta T = \frac{17}{4} p_A V_A = 8.5 \text{ l Atm} = 861.05 \text{ J}\,. \tag{30}$$

3. Per l'entropia si ha:

$$dS = \frac{dQ^{rev}}{T} = \frac{dU + pdV}{T} = nc_V \frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V}\,, \tag{31}$$

da cui

$$\Delta S_{AB} = nc_V \log\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nR\log\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = nc_V \log(3) + nR\log(2) = 77.85\ \mathrm{J/K}\,. \tag{32}$$