Esame 20 Giugno 2023

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2022-2023

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
20 Giugno 2023

NOTA: $\boxed{\textbf{GLI ESERCIZI VANNO CONSEGNATI SU 2 FOGLI DISTINTI}}$

$\boxed{\textbf{Es.1, Es.2 ed Es.3 su uno}}$ $\longleftrightarrow$ $\boxed{\textbf{Es.4, Es.5 ed Es.6 sull'altro}}$

SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA. Esempio "D. Hilbert, 23011862."

Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (7 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}(x^2+1)} \,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (5 pt)
Studiare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = \frac{\sqrt{(z-3)(z^2-4)}}{2z^2} \sin(z) \tag{2}$$

e calcolarne l'integrale sulla circonferenza di raggio unitario centrata in $z = 0$.

Esercizio 3 (3 pt)
Calcolare il residuo nel punto all'infinito della seguente funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{(1-z)^2} \sin\left(\frac{1}{z}\right) . \tag{3}$$

Esercizio 4 (3 pt)
Data la matrice $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \tag{4}$$

con a e b reali e positivi calcolare $e^{\mathcal{A}}$ e dire se esiste o meno $\mathcal{A}^{-1}$.

Esercizio 5 (5 pt)
Trovare la soluzione dell'equazione

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}\delta(t-1) \,, \tag{5}$$

con

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \, . \tag{6}$$

Esercizio 6 (7 pt)
Trovare la soluzione dell'equazione

$$\partial_t f(x,t) = t^2 \partial^2_{xx} f(x,t) - t \partial_x f(x,t) + \delta(t)\delta(x^2 - 1) \, , \tag{7}$$

con condizione iniziale $f(x,-1) = 0$.

Soluzione Es. 1

Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}(z^2+1)} \,. \tag{8}$$

È una funzione polidroma per la quale possiamo porre il taglio da $z = 0$ al punto all'infinito, lungo la semiretta $\Im(z) < 0$. Inoltre, la $f(z)$ ha due singolarità di tipo polare in $z = \pm i$.

Possiamo considerare l'integrale sul circuito chiuso $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_R + \gamma_2 + \gamma_r$ dove

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= x\,, \qquad r \le x \le R\,, & (9)\\
\gamma_2 &= x\,, \qquad -R \le x \le -r\,, & (10)\\
\gamma_R &= Re^{it}\,, \qquad 0 \le t \le \pi\,, & (11)\\
\gamma_r &= re^{it}\,, \qquad \pi \le t \le 0 & (12)
\end{aligned}$$

e poi utilizzare il teorema dei residui per avere

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}} \int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{R}es(f,i)\,, \tag{13}$$

dove

$$\mathrm{R}es(f,i) = \lim_{z\to i} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}(z+i)} = \frac{1}{2ei}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \,. \tag{14}$$

D'altra parte abbiamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}} \int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz &= I\,, & (15)\\
\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz &= 0\,, & (16)\\
\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz &= 0\,, \quad \text{per il Lemma di Jordan}\,. & (17)
\end{aligned}$$

In totale si ha, quindi

$$I = \frac{\pi}{e}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \,. \tag{18}$$

Soluzione Es. 2

La funzione è una funzione polidroma, con 3 punti di diramazione al finito in

$$z = -2\,, \quad z = 2\,, \quad z = 3 \tag{19}$$

e il punto all'infinito. Il dominio di analiticità è tagliato e possiamo posizionare i tagli per esempio collegando $z = -2$ al punto all'infinito lungo la semiretta reale negativa e unendo $z = 2$ a $a = 3$ con un segmento sull'asse reale positiva. Inoltre la funzione ha una singolarità di tipo polare in $z = 0$, dove ha un polo del primo ordine con residuo

$$\mathrm{R}es(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{\sqrt{(z-3)(z^2-4)}}{2z} \sin(z) = -\sqrt{3}\,. \tag{20}$$

Il segno meno deriva dalla posizione dei tagli e dall'aver scelto il ramo principale della radice. Infatti abbiamo

$$\sqrt{(z-3)(z^2-4)} = \sqrt{(z-3)}\sqrt{(z-2)}\sqrt{(z+2)} \tag{21}$$

e per ogni radice possiamo posizionare un taglio dal punto di diramazione al finito fino al punto all'infinito. Una configurazione di tagli che riproduca la scelta di sopra per il prodotto delle tre radici, si può avere prendendo per $\sqrt{(z-3)}$ un taglio da 3 a $+\infty$ sull'asse reale, per $\sqrt{(z-2)}$ un taglio da 2 a $+\infty$ sull'asse reale, e infine per $\sqrt{(z+2)}$ un taglio da -2 a $-\infty$ sempre sull'asse reale. Con questa scelta si ha in $z=0$

$$\lim_{z\to 0}\sqrt{(z+2)} = \sqrt{2}\,, \tag{22}$$

$$\lim_{z\to 0}\sqrt{(z-2)} = i\sqrt{2}\,, \tag{23}$$

$$\lim_{z\to 0}\sqrt{(z-3)} = i\sqrt{3}\,, \tag{24}$$

che dà, appunto

$$\lim_{z\to 0}\sqrt{(z-3)(z-2)(z+2)} = -2\sqrt{3}\,. \tag{25}$$

Infine, il punto all'infinito è un punto di non analiticità, oltre che per il fatto che è un punto di diramazione, anche per il fatto che il seno ha un punto di singolarità essenziale in $z=\infty$.

Se $\gamma = e^{i\theta}$ con $0 \le \theta \le 2\pi$, si ha, per il teorema dei residui che

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{R}es(f,0) = 2\sqrt{3}\pi i\,. \tag{26}$$

Soluzione Es. 3

Il punto all'infinito non è un punto di singolarità per la funzione $f(z)$, anzi è uno zero del primo ordine. Però la funzione ammette residuo nel punto all'infinito poiché

$$\mathrm{R}es(f,\infty) = \mathrm{R}es\left(-\frac{1}{\omega^2}f\left(\frac{1}{\omega}\right),0\right)\,. \tag{27}$$

Quindi

$$\mathrm{R}es(f,\infty) = \lim_{\omega to 0}\omega\left(-\frac{1}{\omega^2(\omega-1)^2}\sin(\omega)\right) = -1\,. \tag{28}$$

Soluzione Es. 4

La matrice $\mathcal{A}$ può essere scritta nella forma

$$\mathcal{A} = 2a\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 0\\ 1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

notare che

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

è il prorettore $\mathcal{P}_1$ sul vettore $\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$, e

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è il prorettore $\mathcal{P}_2$ sul vettore $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)$ perpendicolare $\mathbf{v}_1$.
Usando il teorema spettrale è facile trovare

$$e^{\mathcal{A}} = e^{2a}\mathcal{P}_1 + e^{b}\mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3$$

ricordando che $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 = \mathcal{I}$, si ha

$$e^{\mathcal{A}} = (e^{2a} - 1)\mathcal{P}_1 + (e^{b} - 1)\mathcal{P}_2 + \mathcal{I}\,.$$

L'inversa di $\mathcal{A}$ non esiste perché un autovalore è zero.

Soluzione Es. 5

Possiamo scrivere

$$\mathcal{A} = 2\mathcal{I} + \Delta \quad , \quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

notando che Δ commuta con $2\mathcal{I}$, ed inoltre $\Delta^2 = 0$ si ha

$$e^{t\mathcal{A}} = e^{2t}\, e^{t\Delta} = e^{2t}\Big(\mathcal{I} + t\Delta\Big)$$

quindi introducendo $\mathcal{G}(t) = e^{t\mathcal{A}}$ si ha

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{G}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathcal{G}(t - t')\mathbf{c}\delta(t' - 1)\, dt' = \mathcal{G}(t)\mathbf{x}(0) + \theta(t - 1)\mathcal{G}(t - 1)\mathbf{c}$$

ove $\theta(z) = 0$ se $z < 0$ e e $\theta(z) = 1$ se $z > 0$.

Soluzione Es. 6

Per $-1 < t < 0$ si ha $f(x, t) = 0$, al tempo $t = 0+$, usando le proprietà della funzione delta si ha

$$f(x, 0) = \delta(x^2 - 1) = \frac{1}{2}\Big(\delta(x - 1) + \delta(x + 1)\Big)$$

e l'equazione per $t > 0$ diventa

$$\partial_t f(x, t) = t^2 \partial^2_{xx} f(x, t) - t\partial_x f(x, t)\,.$$

Passando in trasformata di Fourier si ha

$$\frac{d}{dt}\hat{f}(k,t) = (-t^2k^2 - itk)\hat{f}(k,t) \quad \rightarrow \quad \hat{f}(k,t) = e^{-\frac{t^3}{3}k^2 - i\frac{t^2}{2}k}\hat{f}(k,0)$$

antitrasformando:

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int \left(\int e^{-\frac{t^3}{3}k^2 - i\frac{t^2}{2}k} e^{ik(x-x')}\, dk\right) f(x',0)\, dx'$$

l'integrale su k è un integrale gaussiano, quello su x' è immediato:

$$f(x,t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4\pi a(t)}}\left(e^{-\frac{(x-b(t)+1)^2}{4a(t)}} + e^{-\frac{(x-b(t)-1)^2}{4a(t)}}\right)$$

ove $a(t) = t^3/3$ e $b(t) = t^2/2$.
Notare che è il solito calcolo per l'equazione del calore, unica differenza del caso in cui davanti a ∂^2_{xx} non c'è t^2 è che t è rimpiazzato da $t^3/3$ ed inoltre per la presenza del termine $-t\partial_x$ si ha che x è rimpiazzata da $x - t^2/2$.