Esame 20 Luglio 2017

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

Dipartimento di Matematica

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

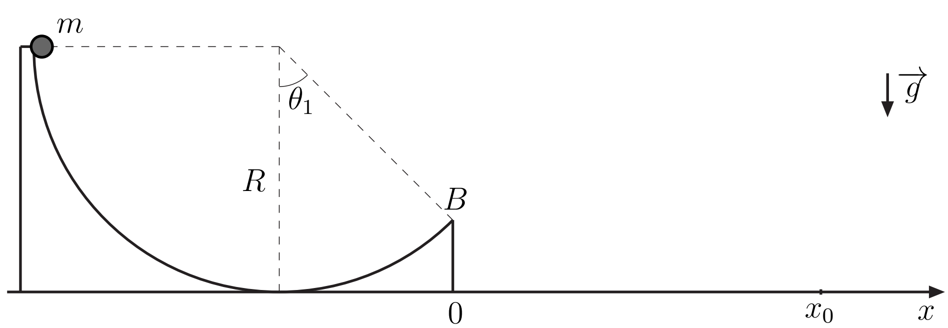
Anno Accademico 2016-2017

Esame - Fisica Generale I
20 Luglio 2017

R. Bonciani, P. Dore

Esercizio 1

Un punto materiale di massa m scorre sulla guida semicircolare liscia descritta in figura ($\theta_1 = \pi/4$). Al tempo $t = t_0$, il punto viene lasciato da fermo nel punto ad altezza R dal suolo (dove R è il raggio della guida), come in figura. In seguito all'azione della forza di gravità, il punto si mette in moto, percorre la guida e se ne distacca in B. Da B in poi il punto cade a terra rimbalzando sul suolo (asse delle x) con urti successivi perfettamente elastici.



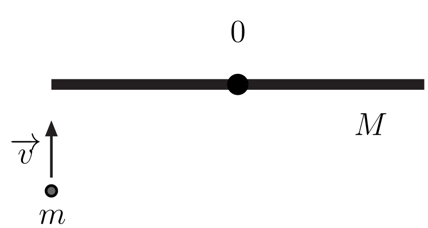
Calcolare:

a) la velocità (in modulo, direzione e verso) con cui il punto materiale si distacca dalla guida nel punto B, nel caso in cui $R = 1$ m;

b) il valore di R affinché il secondo rimbalzo al suolo avvenga nel punto $x_0 = 2.5$ m.

Esercizio 2

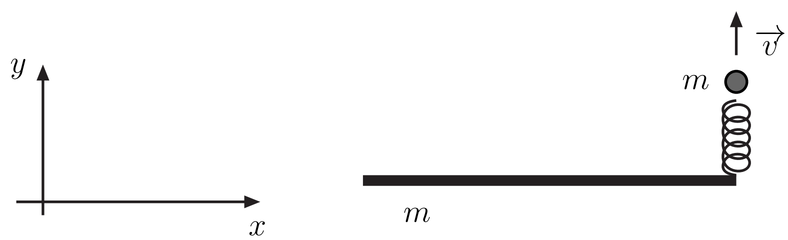
Un'asta omogenea di massa $M = 1$ kg e lunghezza l, appoggiata su un piano orizzontale privo di attrito, è incernierata al piano nel suo punto centrale O. Un proiettile di massa $m = 0.1$ kg e velocità di modulo $v = 10$ m/s, diretta perpendicolarmente all'asta (vedi figura) la colpisce ad un estremo, restandovi conficcato.



Subito dopo l'urto, il sistema si mette in rotazione, ma tende a rallentare a causa di un attrito fra cerniera e sbarra, che esercita un momento frenante costante, di modulo τ. Tutto il processo avviene nel piano orizzontale. Determinare il valore di τ sapendo che il sistema si ferma dopo aver compiuto 2 giri.

Esercizio 3

Un'asta omogenea di massa $M = 1$ kg e lunghezza l è appoggiata su un piano orizzontale (x, y) privo di attrito. Un punto materiale di massa m è poggiato all'estremità di una molla ideale di costante elastica $k = 5 \cdot 10^4$ N/m, compressa di un tratto $A = 7$ cm. L'altra estremità della molla è collegata ad una estremità dell'asta come mostrato in figura. Il sistema è tenuto fermo in questa configurazione da un blocco.



All'istante $t = 0$ il blocco viene rimosso. Determinare l'espressione del modulo della velocità v con cui il punto materiale si stacca dalla molla, assumendo che sia diretta lungo l'asse y e che tutto il processo avvenga nel piano orizzontale, come mostrato in figura. Per i calcoli utilizzare $m = \frac{1}{3}M$.

Esercizio 4

Un gas perfetto compie un ciclo di Carnot reversibile fra due sorgenti con $\Delta T = T_1 - T_2 = 50$ K. Sapendo che la variazione di entropia del gas lungo l'isoterma a temperatura inferiore, T_2, è $\Delta S_2 = -20$ J/K, calcolare il lavoro compiuto dal gas in un ciclo.

Esercizio 5

10 moli di gas perfetto vengono compresse reversibilmente con una trasformazione isoterma, da un volume iniziale $V_1 = 1$ m^3 ad un volume finale V_2. Il gas è contenuto in un recipiente a pareti isolanti e può scambiare calore solo con una sorgente che è costituita da una massa di ghiaccio $m = 0.1$ kg alla temperatura $T = 0\,°$C. Calcolare il volume V_2 per il quale si ha la completa fusione del ghiaccio. (Il calore latente di fusione del ghiaccio è $\lambda = 333.5$ J/g).

Soluzione esercizio 1

Il modulo della velocità v_B con cui la massa m si distacca dalla guida, si trova utilizzando la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgR\cos\pi/4\,, \tag{1}$$

da cui

$$v_B = \sqrt{\sqrt{2}gR}\,. \tag{2}$$

La velocità $\mathbf{v}_B$ è diretta lungo la bisettrice del primo quadrante:

$$\mathbf{v}_B = (v_B\cos\pi/4, v_B\sin\pi/4) = v_B\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)\,. \tag{3}$$

Se $R = 1$ m si ottiene $v_B = 3.72$ m/s.

Dal punto B in poi il problema è un problema di balistica. Il punto parte da B con velocità iniziale $\mathbf{v}_B$, sotto l'azione della gravità.
Troviamo la velocità del punto quando tocca terra. L'accelerazione di gravità è diretta lungo la verticale, quindi la componente x della velocità del punto, $v_B\sqrt{2}/2$, si conserva. La componente y è quella di un proiettile sparato con velocità iniziale $v_B\sqrt{2}/2$ dall'altezza $y_B = R(1-\cos\pi/4) = R(2-\sqrt{2})/2$ verso l'alto. L'attimo in cui il punto materiale tocca terra per la prima volta si trova risolvendo l'equazione

$$-\frac{1}{2}gt^2 + v_B\frac{\sqrt{2}}{2}t + R\frac{(2-\sqrt{2})}{2}\,, \tag{4}$$

che dà come risultato (prendiamo la soluzione positiva)

$$t_0 = \frac{\sqrt{2}v_B}{2g} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2v_B^2}{g^2} + \frac{4R}{g}(2-\sqrt{2})}\,. \tag{5}$$

Lungo l'asse delle x il moto è uniforme. Quindi la distanza percorsa dal proiettile quando tocca terra per la prima volta è

$$d_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}v_Bt_0 = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{v_B}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2v_B^2}{g^2} + \frac{4R}{g}(2-\sqrt{2})}\,. \tag{6}$$

Il rimbalzo è elastico, cioè si conserva l'energia cinetica. La componente x della velocità rimane inalterata, mentre invece la componente y cambia semplicemente di segno. Siccome

$$v_y(t_0) = -gt_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}v_B = -\frac{1}{2}\sqrt{2v_B^2 + 4Rg(2-\sqrt{2})}\,, \tag{7}$$

si ha che il secondo rimbalzo parte da $x = d_0$ con velocità iniziale

$$\mathbf{v}_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}v_B\,,\,\frac{1}{2}\sqrt{2v_B^2 + 4Rg(2-\sqrt{2})}\right)\,. \tag{8}$$

Da questo istante in poi il moto è quello di un proiettile che venga sparato dal suolo con velocità iniziale pari a $\mathbf{v}_0$. Quindi il secondo rimbalzo avverrà dopo un tempo

$$t_1 = \frac{2v_{0y}}{g} = \sqrt{\frac{2v_B^2}{g^2} + \frac{4R}{g}(2-\sqrt{2})}\,, \tag{9}$$

a distanza dal primo pari a

$$d_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}v_B t_1 = \frac{v_B}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2v_B^2}{g^2} + \frac{4R}{g}(2-\sqrt{2})}\,. \tag{10}$$

Affinché con il secondo rimbalzo il punto cada in x_0,deve valere la seguente condizione per lo spazio percorso nei due rimbalzi, $d_0 + d_1$:

$$\begin{aligned} x_0 &= d_0 + d_1 = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{3v_B}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2v_B^2}{g^2} + \frac{4R}{g}(2-\sqrt{2})}\,, && (11)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}R\left(1 + 3\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right) && (12)\end{aligned}$$

da cui si ricava il valore di R:

$$R = \frac{\sqrt{2}}{1+3\sqrt{2\sqrt{2}-1}}x_0 = 70\,\mathrm{cm}. \tag{13}$$

Soluzione esercizio 2

La velocità angolare del sistema subito dopo l'urto può essere ricavata utilizzando la seconda legge cardinale impulsiva, centrata nel punto O. Le uniche reazioni vincolari impulsive che possiamo avere in seguito all'urto sono concentrate in O, quindi hanno momento nullo rispetto al punto e non contribuiscono alla seconda cardinale.

$$0 = \int M_O dt = \int \dot{L}_O = L_O^{(f)} - L_O^{(i)}\,, \tag{14}$$

da cui

$$L_O^{(f)} = L_O^{(i)}\,, \tag{15}$$

dove

$$\begin{aligned} L_O^{(f)} &= I_O\dot{\theta} = \left(\frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{4}ml^2\right)\dot{\theta} = \frac{l^2}{4}\left(\frac{1}{3}M + m\right)\dot{\theta}\,, && (16)\\ L_O^{(i)} &= \frac{1}{2}mlv\,. && (17)\end{aligned}$$

Da qui si ha

$$I_O\dot{\theta} = \frac{1}{2}mlv \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{mlv}{2I_0} = \frac{2mv}{l\left(\frac{1}{3}M+m\right)} \tag{18}$$

Per trovare τ facciamo uso del teorema delle forze vive:

$$L = -\int \tau d\theta = -\tau \Delta\theta = T_f - T_i = -T_i = -\frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 \,, \tag{19}$$

da cui

$$\tau = \frac{I_O \dot{\theta}^2}{2\Delta\theta} \,. \tag{20}$$

Due giri corrispondono ad un $\Delta\theta = 4\pi$. Quindi

$$\tau = \frac{I_O \dot{\theta}^2}{8\pi} = \frac{m^2 v^2}{8\pi \left(\frac{1}{3}M + m\right)} = 0.092 \text{ Nm} \,. \tag{21}$$

Soluzione esercizio 3

Non ci sono forze dissipative, quindi si conserva l'energia meccanica del sistema:

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 \,, \tag{22}$$

dove abbiamo indicato con C il centro di massa della sbarra e dove

$$I_C = \frac{1}{12}Ml^2 \,. \tag{23}$$

Lungo il piano non vi sono forze esterne che agiscono sul sistema. Quindi si conserva la quantità di moto sia lungo le x che lungo le y:

$$0 = mv_x + Mv_{Cx} \,, \tag{24}$$

$$0 = mv_y + Mv_{Cy} \,, \tag{25}$$

ovvero $\mathbf{v}_C = -\frac{m}{M}\mathbf{v}$ e siccome abbiamo come ipotesi che $\mathbf{v}$ sia parallela all'asse delle y, anche $\mathbf{v}_C$ lo sarà.
Rimane da determinare la velocità angolare della sbarra. Siccome non ci sono forze esterne agenti sul sistema, il loro momento rispetto ad un qualunque punto del piano è nullo. Inoltre, all'istante iniziale il sistema è fermo, quindi il vettore quantità di moto del sistema è nullo ad ogni istante. Di conseguenza, il momento angolare si conserva, rispetto a qualsiasi punto del piano. Prendiamo come polo il centro di massa della sbarretta. Avremo allora

$$L_C^{(f)} = L_C^{(i)} \,. \tag{26}$$

Ma $L_C^{(i)} = 0$ e quindi

$$0 = L_C^{(f)} = I_C\omega - mv\frac{l}{2} \,, \tag{27}$$

ovvero

$$\omega = \frac{mvl}{2I_C} = 6\frac{m}{M}\frac{v}{l} \,. \tag{28}$$

Sostituendo nell'equazione di conservazione dell'energia otteniamo

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{m}{M}\right) + \frac{3}{2}mv^2\left(\frac{m}{M}\right) \,, \tag{29}$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{kA^2}{m\left[1+4\left(\frac{m}{M}\right)\right]}} \tag{30}$$

infine, utilizzando $\frac{m}{M} = \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{7}{6}mv^2 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{3kA^2}{7m}} = 17.75 \text{ m/s}\,. \tag{31}$$

Soluzione esercizio 4

Siccome il ciclo è reversibile, avremo che la variazione di entropia totale è nulla. D'altra parte, il ΔS_{tot} è somma dei singoli ΔS sulle varie trasformazioni intermedie. Lungo le adiabatiche, siccome $\not{d}Q = 0$, l'entropia non varia. Quindi, dette ΔS_1 e ΔS_2 le variazioni di entropia lungo le isoterme a temperatura T_1 e T_2, rispettivamente, avremo che

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 0\,, \tag{32}$$

ovvero

$$\Delta S_1 = -\Delta S_2\,. \tag{33}$$

Il lavoro compiuto dal gas nel ciclo è dato, per il Primo Principio, da

$$L_{tot} = Q_1 + Q_2 = T_1\Delta S_1 + T_2\Delta S_2\,, \tag{34}$$

e quindi, utilizzando la (33)

$$L_{tot} = T_1\Delta S_1 + T_2\Delta S_2 = -\Delta S_2(T_1 - T_2) = -\Delta S_2\,\Delta T = 1000 \text{ J}\,. \tag{35}$$

Soluzione esercizio 5

Il calore ceduto dal gas durante la compressione è dato da

$$Q = nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = nRT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) < 0\,, \tag{36}$$

in quanto $V_2 < V_1$. $T = 273.15$ K.
Dato il calore latente di fusione del ghiaccio λ, la massa di ghiaccio che si scioglie avendo assorbito una quantità di calore $\tilde{Q}$, si ricava dalla relazione

$$\tilde{Q} = m\lambda\,. \tag{37}$$

Nel nostro caso $\tilde{Q} = -Q$. Quindi si ha:

$$m\lambda = \tilde{Q} = -nRT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)\,, \tag{38}$$

da cui si ricava

$$V_2 = V_1 e^{-\frac{m\lambda}{nRT}} = 0.23 \text{ m}^3\,. \tag{39}$$