Esame 20 Settembre 2018

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

Dipartimento di Matematica

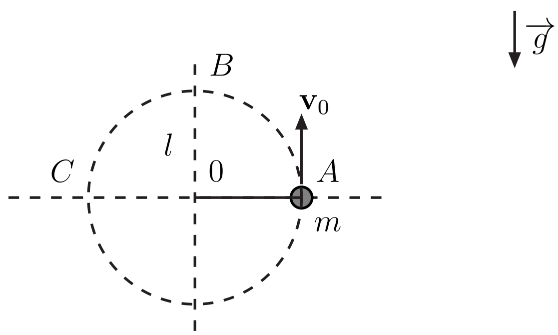
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Anno Accademico 2017-2018

Esercizio 1

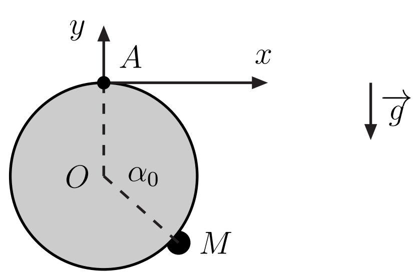
Una massa puntiforme $m = 500$ g viene lanciata dal punto A in direzione dell'asse y con velocità $\mathbf{v}_0$. Poiché la massa è attaccata ad una fune inestensibile e priva di massa lunga $l = 50$ cm il cui secondo estremo è vincolato ad un punto fisso O, la sua traiettoria sarà una circonferenza di centro O e raggio l, giacente nel piano verticale (vedi figura). Sapendo che nel punto B la tensione della fune è nulla,

1. determinare $\mathbf{v}_0$,
2. determinare la tensione della fune in C.



Esercizio 2

Un disco di massa $M = 1$ kg e raggio $R = 1$ m è incernierato nel punto A (vincolo liscio) e può muoversi, su un piano verticale, attorno a tale punto. Sul bordo del disco è fissato un punto materiale di massa M, posto in maniera tale che la congiungente OM formi un angolo $\alpha_0 = 2/3\pi$ con la congiungente OA. Sul sistema agisce la forza di gravità.



1. Trovare la configurazione di equilibrio. In particolare dare le coordinate del punto O quando il sistema è all'equilibrio.
2. Se il disco viene lasciato a $t = 0$ nella posizione in figura, inizia ad oscillare. Scrivere l'equazione del moto e, nell'approssimazione delle piccole oscillazioni, determinare il periodo di oscillazione.

Esercizio 3

Una mole di gas perfetto monoatomico, inizialmente all'equilibrio nello stato A, con $T_A = 300$ K e $p_A = 1$ Atm, esegue un ciclo termodinamico composto dalle seguenti trasformazioni quasi statiche: una isobara, che porta il gas nello stato B con $V_B = 3/2 V_A$, seguita da un'adiabatica che porta il gas allo stato C, a temperatura T_A, e infine da un'isoterma che chiude il ciclo riportando il gas nello stato iniziale A.

1. Tracciare il diagramma del ciclo sul piano di Clapeyron.

2. Calcolare la quantità di calore assorbita dal gas durante un ciclo.

3. Calcolare il rendimento del ciclo.

Soluzione esercizio 1

1. Mettiamo in relazione la tensione della fune in B con v_0.

   Il moto è caratterizzato dalla presenza di sole forze conservative (la tensione della fune è sempre perpendicolare al moto e quindi non fa lavoro). Possiamo allora utilizzare la conservazione dell'energia. Posto $V = 0$ sull'asse CA, si ha

   $$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgl\,, \tag{1}$$

   da cui

   $$v_B^2 = v_0^2 - 2gl\,. \tag{2}$$

   Scrivendo il secondo principio lungo la direzione radiale BO, ed indicando con T la tensione della fune, avremo

   $$T + mg = m\frac{v_B^2}{l} = m\frac{v_0^2}{l} - 2mg\,. \tag{3}$$

   Sicoome $T = 0$, si ha immediatamente

   $$v_0 = \sqrt{3gl} = 3.84\ \mathrm{ms}^{-1}\,. \tag{4}$$

2. La tensione nel punto C si ottiene ancora una volta dal secondo principio lungo il raggio CO. Questa volta la forza peso è perpendicolare e non gioca nessun ruolo.

   Si deve avere

   $$T = m\frac{v_C^2}{l}\,, \tag{5}$$

   dove v_C può essere trovata con la conservazione dell'energia

   $$v_C^2 = V_0^2\,. \tag{6}$$

   Infine

   $$T = m\frac{v_0^2}{l} = 14.7\ \mathrm{N}\,. \tag{7}$$

Soluzione esercizio 2

1. Siccome il sistema è soggetto soltanto alla forza di gravità, la posizione di equilibrio sarà raggiunta quando il centro di massa (c.m.) del sistema (chiamiamolo G) è allineato verticalmente col perno A. Quindi basta trovare la posizione di G.

   Il centro di massa del disco è posto in O. Quindi si tratta di trovare il c.m. di due punti materiali i ugual massa M posti a distanza R. Banalmente si trova che il c.m. è posizionato lungo la congiungente OM ad $R/2$ da entrambi.

   L'angolo GAO si trova utilizzando il teorema di Carnot. La distanza $GA = d$ è data da

   $$d^2 = R^2 + \frac{R^2}{4} - R^2\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{7}{4}R^2 \tag{8}$$

e quindi $d = 1.32$ m. Indicando l'angolo GAO con θ_0, si ha

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{2Rd}\left(R^2 + d^2 - \frac{R^2}{4}\right) = \frac{5}{2\sqrt{7}} = 0.95\,. \tag{9}$$

Le coordinate del punto O all'equilibrio, rispetto ad un SdR cartesiano centrato in A come in figura, sono

$$\begin{aligned} x_O &= -R\sin\theta_0 = -R\sqrt{1-\cos^2\theta_0} = -R\sqrt{\frac{23}{48}} = -0.69 \text{ m}\,, & (10)\\ y_O &= -R\cos\theta_0 = -R\frac{5}{2\sqrt{7}} = -0.95 \text{ m}\,. & (11)\end{aligned}$$

2. Il sistema è un pendolo composto che ruota intorno al punto A. Ha quindi un grado di libertà e possiamo scrivere l'equazione del moto usando per esempio la seconda cardinale centrata in A. Se indichiamo con θ l'angolo formato dalla congiungente GA e la verticale, si ha

$$I_A\ddot{\theta} + 2Mg\,d\sin\theta = 0\,, \tag{12}$$

con le condizioni iniziali

$$\dot{\theta}(t=0) = 0\,, \quad \theta(t=0) = \theta_0\,. \tag{13}$$

Siccome $\theta_0 \sim 0.32$ si può approssimare il moto ad un moto armonico ponendo

$$\sin\theta \sim \theta\,, \tag{14}$$

ed ottenendo

$$\ddot{\theta} + \frac{2Mgd}{I_A}\theta = 0\,, \tag{15}$$

dove

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{2Mgd}}\,. \tag{16}$$

Per determinare il periodo quindi dobbiamo calcolare I_A. Si ha

$$I_A = I_{A,disco} + I_{A,massa}\,, \tag{17}$$

dove per il teorema di Huygens-Steiner si ha

$$I_{A,disco} = MR^2 + \frac{1}{2}MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 \tag{18}$$

e per il punto materiale

$$I_{A,massa} = 3MR^2\,. \tag{19}$$

In totale si ha

$$I_A = \frac{9}{2}MR^2\,. \tag{20}$$

Quindi, utilizzando le espressioni di I_A e d, si ottiene

$$T = \pi\sqrt{\frac{18R}{\sqrt{7}g}} = 2.62 \text{ s}\,. \tag{21}$$

Soluzione esercizio 3

Il gas assorbe calore durante l'espansione isobara e cede calore nella compressione isoterma.

La temperatura dello stato B si trova utilizzando l'equazione di stato del gas perfetto:

$$T_B = \frac{p_B V_B}{R} = \frac{3}{2}\frac{p_A V_A}{R} = \frac{3}{2} T_A = 450 \text{ K}\,. \tag{22}$$

Il volume nello stato A è dato da

$$V_A = \frac{R\,T_A}{p_A} = 0.0246 \text{ m}^3\,, \quad V_B = \frac{3}{2} V_A = 0.0369 \text{ m}^3\,. \tag{23}$$

Per il Primo Principio, lungo AB si ha:

$$đQ = dU + đL = \tilde{c}_V\, dT + p_A\, dV\,, \tag{24}$$

e quindi

$$Q_{ass} = \tilde{c}_V (T_B - T_A) + p_A (V_B - V_A) = 3117.75 \text{ J}\,. \tag{25}$$

Caratterizziamo il punto C. Abbiamo che $T_C = T_A$. Siccome poi B e C stanno su la stessa adiabatica reversibile, si avrà per le formule di Poisson

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}\,, \tag{26}$$

dove $\gamma = 5/3$. Quindi

$$V_C = \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^{\frac{3}{2}} V_B = 0.0678 \text{ m}^3 \tag{27}$$

Per calcolare il rendimento del ciclo ricordiamoci che

$$\eta = \frac{Q_{ass} + Q_{ced}}{Q_{ass}} = 1 + \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}}\,. \tag{28}$$

Il calore ceduto si trova calcolandolo lungo l'isoterma CA. Siccome $dT = 0$ e siccome il nostro sistema termodinamico è un gas perfetto, si ha $dU = 0$. Quindi

$$Q_{ced} = \int_C^A p\, dV = R\,T_A \,\ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) = -2528.66 \text{ J}\,. \tag{29}$$

Pertanto

$$\eta = 1 + \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} = 19\%\,. \tag{30}$$