Compito 21 Giugno 2016

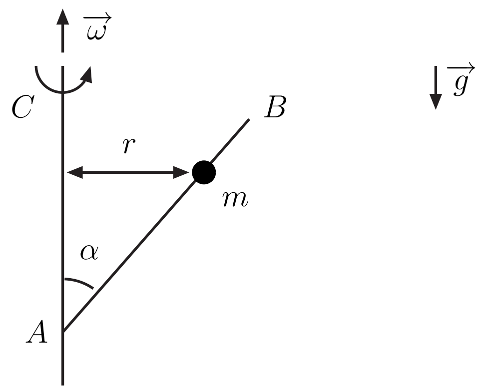
Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2015-2016

Compito di Fisica Generale I per matematici
21 Giugno 2016

R. Bonciani, P. Dore

Esercizio 1



Un anellino di massa m è infilato in un'asta AB inclinata di un angolo α rispetto alla verticale e collegata rigidamente tramite il punto A ad un'altra asta verticale, AC, che ruota a velocità angolare costante ω (vedi figura).

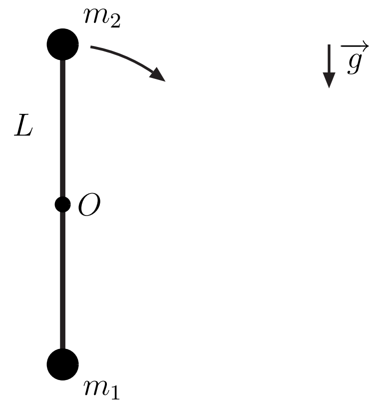
1. Fra anello (di dimensioni trascurabili e quindi da considerare puntiforme) e asta non c'è attrito (vincolo liscio). Trovare il valore di $\omega = \omega_0$, per il quale l'anello m stia in equilibrio a distanza $r = r_0$ dall'asta verticale. *(4 punti)*

2. Fra anello e asta c'è attrito con coefficiente di attrito statico $\mu_S = 0.6$. Trovare per quali valori di ω l'anello m rimane in equilibrio a distanza r_0 dalla verticale. *(4 punti)*

3. Nel caso di vincolo liscio si fa ruotare il sistema a $\omega = 2\omega_0$ con un motore che è in grado di assicurare velocità angolare costante qualunque cosa succeda. Lasciando l'anello da fermo in $r = r_0$ trovare la sua equazione di moto nel sistema di riferimento rotante. *(2 punti)*

Dati numerici: $|\overrightarrow{g}| = 9.8$ m s^{-2}, $r_0 = 20$ cm, $\alpha = \pi/4$, $m = 500$ g.

Esercizio 2



Un manubrio è costituito da un'asta omogenea di massa m e lunghezza $2L$ ai capi della quale sono fissate due masse, m_1 e $m_2 > m_1$. Il sistema è disposto su un piano verticale ed è vincolato a ruotare senza attrito attorno ad un'asse orizzontale passante per il centro O dell'asta (il sistema è bi-dimensionale). Il sistema è inizialmente disposto nella posizione di equilibrio instabile (con la massa m_2 alla quota più alta) ed una piccola perturbazione ne provoca la rotazione.

1. Calcolare la posizione iniziale del centro di massa del sistema. *(3 punti)*

2. Calcolare il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione passante per O. *(3 punti)*

3. Calcolare velocità e accelerazione del centro di massa quando il sistema passa per la posizione di equilibrio stabile (massa m_2 alla quota più bassa). *(4 punti)*

Dati numerici: $m = 2$ kg, $m_1 = m = 2$ kg, $m_2 = 3m = 6$ kg, $L = 80$ cm.

Esercizio 3

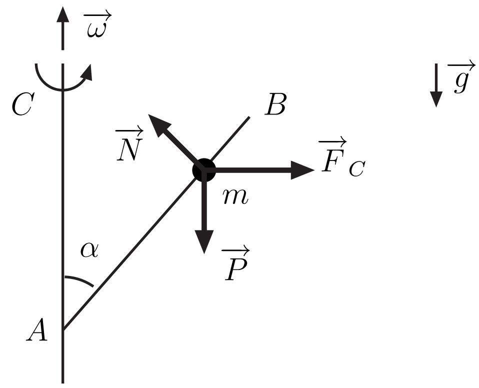
Una mole di gas perfetto monoatomico è inizialmente in equilibrio nello stato A, alla temperatura $T_A = 300°$K. Il gas subisce una trasformazione isocora quasi statica che lo porta a raddoppiare la pressione, seguita da una trasformazione adiabatica quasi statica con la quale il gas è riportato alla pressione iniziale. Infine, una trasformazione isobara quasi statica riporta il gas nello stato iniziale A.

1. Disegnare il ciclo nel piano di Clapeyron. *(3 punti)*

2. Calcolarne il rendimento. *(7 punti)*

Soluzione Esercizio 1

1. Ci mettiamo nel sistema di riferimento solidale con l'asta AC. In questo SdR l'anello di massa m è soggetto alla forza peso e alla forza centrifuga, oltre che alla reazione vincolare che può essere solo perpendicolare all'asta AB.



Prendendo un SdR che abbia l'asse verticale orientata come ω e quella orizzontale perpendicolare ad AC, si ha, imponendo le condizioni di equilibrio:

$$F_C - N\cos\alpha = 0\,, \tag{1}$$
$$N\sin\alpha - P = 0\,, \tag{2}$$

dove $F_C = m\omega^2 r$, se r è la distanza di m dall'asse di rotazione, e $P = mg$.

Posto $r = r_0$, si ha:

$$N = \frac{mg}{\sin\alpha}\,, \tag{3}$$
$$\omega_0^2 = \frac{g}{r_0}\mathrm{cotg}\alpha\,, \tag{4}$$

e quindi

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{r_0}\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\frac{g}{r_0}} = 7\ \mathrm{s}^{-1}\,. \tag{5}$$

2. Nel caso con attrito abbiamo anche una reazione vincolare tangente all'asta AB, $\vec{F}_t$, tale che

$$|\vec{F}_t| \leq \mu_S |\vec{N}|\,. \tag{6}$$

I valori di ω minimo e massimo, ω_{min} e ω_{max}, si otterranno rispettivamente quando $|\vec{F}_t| = \mu_S|\vec{N}|$ e $\vec{F}_t$ punta verso B e quando invece, con $|\vec{F}_t| = \mu_S|\vec{N}|$, $\vec{F}_t$ punta verso A.

Nel primo caso abbiamo:

$$0 = F_C + F_t\sin\alpha - N\cos\alpha\,, \tag{7}$$
$$0 = N\sin\alpha + F_t\cos\alpha - mg\,, \tag{8}$$

ovvero

$$
\begin{aligned}
0 &= m\omega^2 r + \mu_S N \sin\alpha - N\cos\alpha\,, && (9)\\
0 &= N\sin\alpha + \mu_S N\cos\alpha - mg\,. && (10)
\end{aligned}
$$

Dalla seconda equazione si ottiene:

$$
N = \frac{mg}{\sin\alpha + \mu_S\cos\alpha}\,, \tag{11}
$$

e sostituendola nella prima, ricordando che $\alpha = \pi/4$ si ottiene:

$$
\omega_{min} = \sqrt{\frac{\cos\alpha - \mu_S\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu_S\cos\alpha}\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{1-\mu_S}{1+\mu_S}\frac{g}{r}} = 3.74\ \mathrm{s}^{-1}\,. \tag{12}
$$

Per trovare ω_{max} invece abbiamo:

$$
\begin{aligned}
0 &= F_C - F_t\sin\alpha - N\cos\alpha\,, && (13)\\
0 &= N\sin\alpha - F_t\cos\alpha - mg\,, && (14)
\end{aligned}
$$

ovvero

$$
\begin{aligned}
0 &= m\omega^2 r - \mu_S N\sin\alpha - N\cos\alpha\,, && (15)\\
0 &= N\sin\alpha - \mu_S N\cos\alpha - mg\,, && (16)
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
N = \frac{mg}{\sin\alpha - \mu_S\cos\alpha}\,, \tag{17}
$$

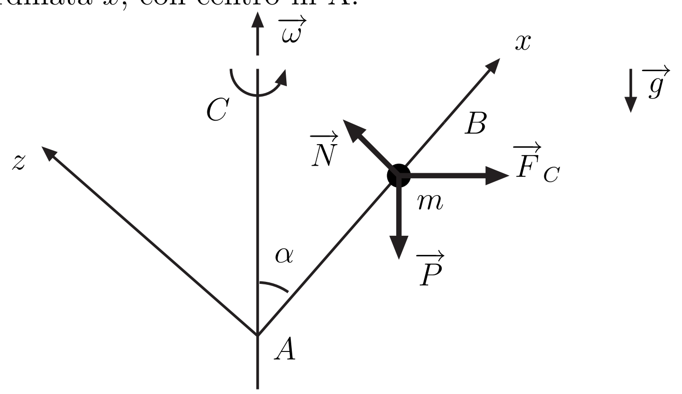
e

$$
\omega_{max} = \sqrt{\frac{\cos\alpha + \mu_S\sin\alpha}{\sin\alpha - \mu_S\cos\alpha}\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{1+\mu_S}{1-\mu_S}\frac{g}{r}} = 13.10\ \mathrm{s}^{-1}\,. \tag{18}
$$

In totale:

$$
3.74\ \mathrm{s}^{-1} \leq \omega \leq 13.10\ \mathrm{s}^{-1}\,. \tag{19}
$$

3. Il moto nel SdR rotante (solidale con l'asta) è unidimensionale lungo l'asta AB. Prendiamo questa come coordinata x, con centro in A.



Le forze che agiscono sull'anello m lungo tale direzione sono la componente x della forza centrifuga e della forza peso.

Si ha

$$m\ddot{x} = m\omega^2 \sin^2\alpha x - mg\cos\alpha = 4m\omega_0^2 \sin^2\alpha x - mg\cos\alpha\,, \tag{20}$$

dove abbiamo esplicitato la condizione data dal problema $\omega = 2\omega_0$.

Riscrivendo la (20) si trova la seguente equazione del moto, indipendente dalla massa

$$\ddot{x} - 2\omega_0^2 x = -g\frac{\sqrt{2}}{2}\,. \tag{21}$$

NB. Il moto si svolge solo lungo la coordinata x. Per trattare il problema nella sua completezza, bisognerebbe tener conto anche della componente delle forze agenti su m perpendicolare a x, ma sullo stesso piano (coordinata z), che si dovranno fare equilibrio, e anche a quella perpendicolare al piano costituito dalla verticale e dall'asta AB (coordinata y).

Lungo la coordinata z avremo

$$N = m\omega^2 \sin\alpha x\cos\alpha + mg\sin\alpha\,. \tag{22}$$

Lungo la coordinata y, invece, la reazione normale del vincolo dovrà bilanciare la forza di Coriolis che agisce sull'anello m per il fatto stesso che si muove sulle x. Ciò fa sì che per mantenere una velocità angolare costante durante il moto di m sulle x, il motore che fa girare l'asta debba far lavoro.

Soluzione Esercizio 2

1. Il centro di massa del manubrio si calcola tenendo conto delle sue componenti. L'asta ha il centro di massa in O. Quindi si ha

$$y_{cm} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_2 L - m_1 L}{m + m_1 + m_2} = \frac{2}{5}L = 32\ \text{cm}\,. \tag{23}$$

2. Il momento d'inerzia del manubrio rispetto all'asse passante per O si compone di tre pezzi: il momento d'inerzia della sbarretta I_{sb} e quello delle due masse I_{m_1} e I_{m_2}. Si ha:

$$I_O = I_{sb} + I_{m_1} + I_{m_2} = m\frac{(2L)^2}{12} + L^2(m_1 + m_2) = \frac{13}{3}mL^2 = 5.55\ \text{kg m}^2\,. \tag{24}$$

3. Si può risolvere con l'energia. Nella configurazione iniziale il manubrio ha tutta energia potenzile dovuta alla sua energia gravitazionale. Si avrà

$$U_0 = 5mg\frac{2}{5}L = 2mgL = 31.36\ \text{Nm}\,. \tag{25}$$

Nella configurazione di equilibrio stabile, l'energia del manubrio sarà data dalla sua energia cinetica e da quella potenziale:

$$U = -5mg\frac{2}{5}L = -2mgL = -31.36\ \text{Nm}\,, \tag{26}$$

$$T = \frac{1}{2}I_0\omega^2\,, \tag{27}$$

dove ω è la velocità angolare del manubrio nell'istante in cui passa dalla configurazione di equilibrio stabile. Per la conservazione dell'energia si ha

$$\frac{1}{2}I_0\omega^2 - 5mg\frac{2}{5}L = 5mg\frac{2}{5}L\,, \tag{28}$$

da cui

$$\omega = \sqrt{\frac{8mgL}{I_0}} = \sqrt{\frac{24}{13}\frac{g}{L}} = 4.76\ \text{s}^{-1}\,. \tag{29}$$

La velocità e l'accelerazione del centro di massa saranno date da (moto circolare):

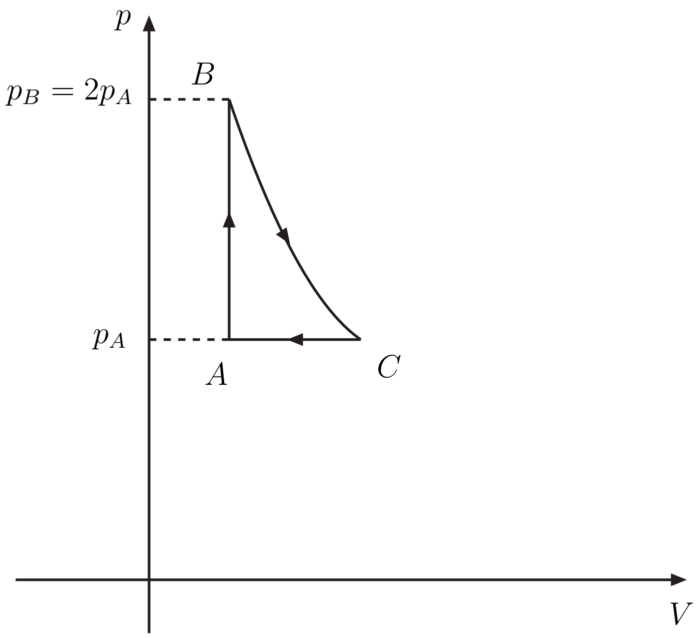
$$v_{cm} = \omega\frac{2}{5}L = 1.52\ \text{m/s}\,, \tag{30}$$

$$a_{cm} = \frac{v_{cm}^2}{r} = \frac{4}{25}\omega^2L^2\frac{5}{2L} = \frac{2}{5}\omega^2L = 7.24\ \text{m s}^{-2}\,, \tag{31}$$

dove abbiamo considerato che nel punto di equilibrio stabile l'unica componente non nulla dell'accelerazione è quella radiale. La velocità v_{cm} sarà diretta tangenzialmente alla circonferenza che descrive il centro di massa nel suo moto (quindi in particolare sarà orizzontale con verso da destra verso sinistra), mentre l'accelerazione sarà radiale e diretta verso il centro.

Soluzione Esercizio 3

1. Il ciclo nel piano di Clapeyron è:



2. In A scriviamo l'equazione del gas perfetto:

$$p_A V_A = RT_A\,. \tag{32}$$

In B analogamente abbiamo

$$p_B V_A = RT_B\,, \tag{33}$$

e sapendo che $p_B = 2p_A$ si ottiene

$$T_B = 2T_A = 600°\mathrm{K}\,. \tag{34}$$

Per l'adiabatica quasi statica valgono le formule di Poisson, quindi:

$$p_B V_B^\gamma = p_A V_C^\gamma\,, \tag{35}$$

con $\gamma = 5/3$, nel caso monoatomico. Allora

$$V_C = 2^{\frac{1}{\gamma}} V_A\,, \tag{36}$$

e

$$T_C = \frac{p_C V_C}{R} = \frac{p_A V_A}{R} 2^{\frac{1}{\gamma}} = T_A 2^{\frac{3}{5}} = 454.7°\mathrm{K}\,. \tag{37}$$

Il sistema cede calore nella trasformazione CA e acquista calore nella AB.

Il rendimento è definito come

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{ceduto}|}{Q_{assorbito}} = 1 - \frac{|Q_{CA}|}{Q_{AB}}\,. \tag{38}$$

Lungo l'isocora, siccome il volume rimane costante, applicando il Primo Principio si ottiene:

$$đQ = dU + pdV = dU\,, \tag{39}$$

e quindi

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = c_V (T_B - T_A) = \frac{3}{2} R (T_B - T_A)\,. \tag{40}$$

Lungo l'isobara invece si ha

$$đQ = dH - V dp = dH\,, \tag{41}$$

e quindi

$$Q_{CA} = \Delta H_{CA} = c_p (T_A - T_C) = -\frac{5}{2} R (T_C - T_A)\,. \tag{42}$$

Infine, si ottiene

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{CA}|}{Q_{AB}} = 1 - \frac{5}{3}\frac{(T_C - T_A)}{(T_B - T_A)} = 1 - \frac{5}{3}(2^{\frac{3}{5}} - 1) = 0.14\,. \tag{43}$$