Esame 21 Giugno 2022

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2021-2022

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
21 Giugno 2022

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es.1 e 2 su uno ed Es.3 e 4 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (9 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x^3+1)}\, dx \,, \tag{1}$$

con $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 (6 pt)
Specificare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = \frac{\sqrt{z+2}\,\log\left(z^2+2\right)}{z\sinh(z)} \tag{2}$$

e calcolare il seguente integrale:

$$\int_\gamma f(z)\, dz \,, \tag{3}$$

dove $\gamma = e^{it}$ con $0 < t \leq 2\pi$, circonferenza centrata nell'origine, di raggio 1.

Esercizio 3 (6 pt)
Si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{A}\mathbf{x} \,, \tag{4}$$

ove

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

• calcolare $\mathbf{x}(t)$ in funzione di $\mathbf{x}(0)$;
• discutere se esistono condizioni iniziali $\mathbf{x}(0)$ tali che $\mathbf{x}(t)$ diverge per $t \to \infty$.

Esercizio 4 (9 pt)
Trovare la $f(x,t)$ soluzione dell'equazione

$$\partial_t f(x,t) = e^{-t}\partial^2_{xx} f(x,t) + \delta(x^2+x)\delta(t^2+t) \tag{6}$$

con $-\infty < x < \infty$ e condizione iniziale $f(x,-1/2) = 0$.

Soluzione Es. 1

Consideriamo la seguente funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^{ikz}}{(z^3+1)}\,, \tag{7}$$

che ha tre poli semplici in

$$z_1 = -1\,, \quad z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\,, \quad z_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\,, \tag{8}$$

con

$$z_2 z_3 = 1\,, \quad z_2 + 1 = i\sqrt{3} z_3\,, \quad z_3 + 1 = -i\sqrt{3} z_2\,, \quad z_2 - z_3 = i\sqrt{3}\,. \tag{9}$$

A seconda del segno di k possiamo integrare ls $f(z)$ su un cammino $\gamma = \gamma_1 + \gamma_R + \gamma_2 + \gamma_r$ dove $\gamma_2 = t$, con $-\infty < t < -1-r$, $\gamma_1 = t$, con $-1+r < t < \infty$, γ_R la semicirconferenza di raggio R nel semipiano $\Im z > 0$ o $\Im z < 0$ nel caso $k > 0$ o $k < 0$, rispettivamente. Per γ_r possiamo scegliere indipendentemente purché ci ricordiamo di includere o escludere (a seconda dei casi) il residuo in $z = -1$. Abbiamo:

1. $\boxed{\text{Caso } k > 0}$. Per il Teorema dei Residui si ha

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, z_2)\,, \tag{10}$$

dove abbiamo considerato γ_r nel semipiano superiore. Si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f, z_2) &= \lim_{z\to z_2} (z-z_2)\frac{e^{ikz}}{(z+1)(z-z_2)(z-z_3)} = \frac{e^{ikz_2}}{(z_2+1)(z_2-z_3)} = -\frac{z_2}{3} e^{ikz_2}\,, \\ &= -\frac{1+i\sqrt{3}}{6} e^{i\frac{k}{2}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}k}\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Inoltre

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_\gamma f(z)\,dz = I + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz - \lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz \tag{12}$$

con

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0\,, \qquad \text{Per il lemma di Jordan} \tag{13}$$

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = i\pi \mathrm{Res}(f, z_1)\,, \tag{14}$$

dove

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \lim_{z\to z_1} (z+1)\frac{e^{ikz}}{(z+1)(z^2-z+1)} = \frac{e^{-ik}}{3}\,. \tag{15}$$

Infine

$$I = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f, z_2) + i\pi \mathrm{Res}(f, z_1) = -i\pi\,\frac{1+i\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{k}{2}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}k} + i\pi\,\frac{e^{-ik}}{3}\,. \tag{16}$$

2. $\boxed{\text{Caso } k < 0}$. Per il Teorema dei Residui si ha

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_\gamma f(z)\, dz = -2\pi \text{Res}(f, z_3)\,, \tag{17}$$

dove il segno meno deriva dal fatto che γ è ora percorso in senso orario e adesso γ_r lo prendiamo nel semipiano inferiore. Inoltre

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_3) &= \lim_{z\to z_3} (z - z_3) \frac{e^{ikz}}{(z+1)(z-z_2)(z-z_3)} = \frac{e^{ikz3}}{(z_3+1)(z_3-z_2)} = -\frac{z3}{3} e^{ikz_3}\,, \\ &= -\frac{1 - i\sqrt{3}}{6} e^{i\frac{k}{2}} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}k} \end{aligned} \tag{18}$$

e

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_\gamma f(z)\, dz = I + \lim_{R\to\infty} \int_{-\gamma_R} f(z)\, dz + \lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz \tag{19}$$

con

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-\gamma_R} f(z)\, dz = 0\,, \qquad \text{Per il lemma di Jordan} \tag{20}$$

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = i\pi \text{Res}(f, z_1) = \frac{i\pi}{3} e^{-ik} \tag{21}$$

Infine

$$I = -2\pi i\, \text{Res}(f, z_3) - i\pi \text{Res}(f, z_1) = -i\pi\, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{k}{2}} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}k} - i\pi\, \frac{e^{-ik}}{3}\,. \tag{22}$$

3. $\boxed{\text{Caso } k = 0}$. Se $k = 0$ entrambi i percorsi vanno bene. E infatti le due soluzioni, per $k > 0$ e per $k < 0$, hanno lo stesso limite $k \to 0$ che vale

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,. \tag{23}$$

Possiamo riunire in un'unica formula i due risultati come segue:

$$I = -i\pi \left(\frac{k}{3|k|} + \frac{i\sqrt{3}}{3} \right) e^{i\frac{k}{2}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}|k|} + \frac{k}{|k|} i\pi\, \frac{e^{-ik}}{3}\,. \tag{24}$$

Soluzione Es. 2

La funzione $f(z)$ è una funzione polidroma con punti di diramazione e singolarità polari. Al finito si hanno singolarità polari in

$$z = 0\,, \tag{25}$$

$$\sinh(z) = 0 \Rightarrow z = i\pi k\,, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}\,, \tag{26}$$

quindi $z = 0$ è un polo doppio, mentre $z = i\pi k$ con $k \neq 0$ sono poli semplici.

La radice ha un punto di diramazione in $z = -2$ e un'altro all'infinito. Quindi per prendere il ramo principale della funzione bisogna porre il teglio da -2 all'infinito. Il logaritmo ha due punti di diramazione al finito, in $z = \pm i\sqrt{2}$ e un punto doppio all'infinito. Quindi il ramo principale ha due tagli che collegano il punto $z = i\sqrt{2}$ all'infinito e il punto $z = -i\sqrt{2}$ all'infinito.

Quindi all'interno della circonferenza di raggio 1 rimane soltanto la singolarità isolata in $z = 0$ che è un polo doppio. L'integrale quindi si può fare utilizzando il teorema dei residui:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, 0)\,, \tag{27}$$

dove il residuo si trova facilmente utilizzando qualche approssimazione

$$f(z) \simeq \frac{\left(\sqrt{2} + \frac{z}{2\sqrt{2}} + ...\right)\left(\ln(2) + \frac{z^2}{2} + ...\right)}{z^2\left(1 + \frac{z^2}{6} + ...\right)} \simeq \frac{\sqrt{2}\ln(2)}{z^2} + \frac{\ln(2)}{2\sqrt{2}\, z} + ... \tag{28}$$

Quindi

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \pi i \frac{\ln(2)}{\sqrt{2}}\,. \tag{29}$$

Soluzione Es. 3

Calcoliamo gli autovalori e gli autovettori della matrice $\mathcal{A}$, si ottiene

$$\lambda_1 = -1 \;\;,\;\; \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2 \;\;,\;\; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 2 \;\;,\;\; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ovviamente poiché $\mathcal{A}$ e' autoggiunta gli autovalori sono reali e gli autovettori sono tra loro ortogonali, la soluzione e'

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=1}^{3} a_n \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}$$

ove a_1, a_2 e a_3 sono determinati dalla condizione iniziale.
Notando che $\lambda_3 > 0$ sicuramente esistono condizioni iniziali tali che $\mathbf{x}(t)$ diverge per $t \to \infty$, basta che $\mathbf{x}(0)$ non sia perpendicolare a $\mathbf{v}_3$.

Soluzione Es. 4

Usando le proprietà della funzione delta si ha

$$\delta(x^2 + x) = \delta(x) + \delta(x+1)\ ,\ \ \delta(t^2 + t) = \delta(t) + \delta(t+1)$$

Tenendo conto della condizione iniziale l'equazione per $t \geq 0$ si riduce ha

$$\partial_t f(x,t) = e^{-t} \partial^2_{xx} f(x,t)$$

con condizione iniziale

$$f(x,0) = \delta(x) + \delta(x+1)\,.$$

Passando in trasformata di Fuorier si ha

$$\frac{d}{dt}\hat{f}(k,t) = -k^2 e^{-t} \hat{f}(k,t)$$

che si risolve facilmente:

$$\hat{f}(k,t) = e^{-G(t)k^2} \hat{f}(k,0)$$

ove

$$G(t) = \int_0^t e^{-t'}\, dt' = 1 - e^{-t}\,.$$

Si ha quindi

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-G(t)k^2} \hat{f}(k,0) e^{ikx}\, dk = \frac{1}{2\pi} \int \int e^{-G(t)k^2} f(x',0) e^{ik(x-x')}\, dk\, dx'$$

usando la $f(x',0)$ e ricordando la trasformata di Fourier della Gaussiana si ottiene

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi G(t)}} e^{-\frac{(x+1)^2}{4G(t)}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi G(t)}} e^{-\frac{x^2}{4G(t)}}\ .$$