Compito 24 Febbraio 2016

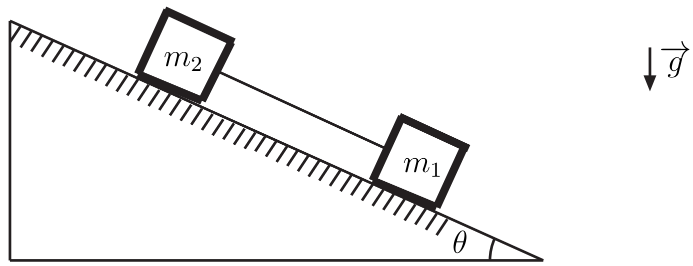
Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2015-2016

Compito di Fisica Generale I per matematici
24 Febbraio 2016

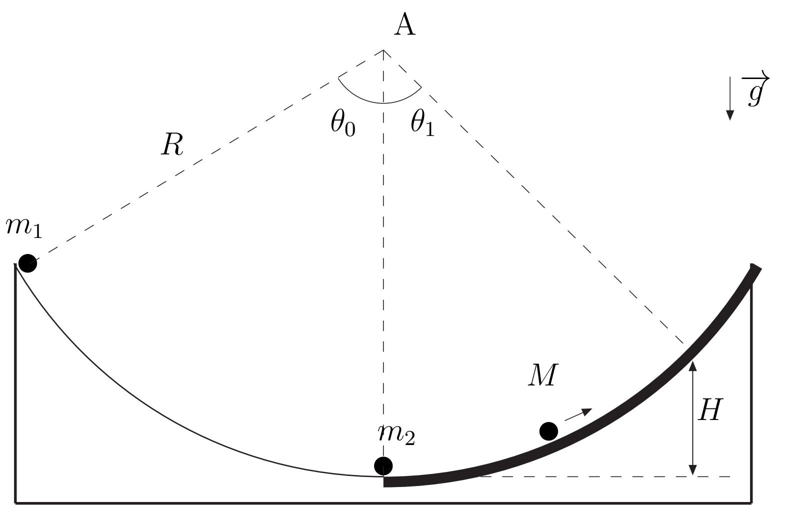
R. Bonciani, P. Dore

Esercizio 1



Due corpi di massa $m_1 = 3$ kg ed $m_2 = 1$ kg, connessi da una fune ideale, scivolano su un piano scabro, inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Il coefficiente di attrito fra corpo e piano vale $\mu_1 = 0.1$ per il corpo 1 e $\mu_2 = 0.2$ per il corpo 2. Per come è fatto il sistema (vedi figura), m_1 precede m_2 nella discesa e la fune rimane sempre tesa. Determinare il valore di θ per il quale il sistema dei due corpi procede con velocità costante.

Esercizio 2

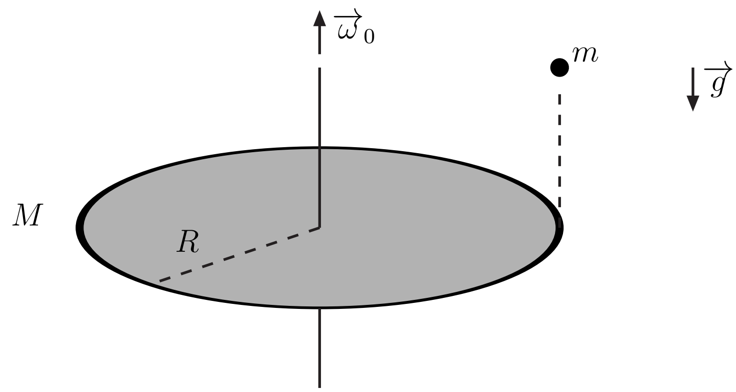


Un corpo puntiforme di massa $m_1 = 2$ kg è posto su una guida circolare verticale di raggio $R = 0.5$ m e centro A (vedi figura) fermo nella posizione iniziale ad un angolo $\theta = \theta_0 = \pi/4$ con la verticale. La parte di sinistra della guida circolare, cioè il tratto che va dalla posizione con $\theta = \theta_0$ a $\theta = 0$, è liscia, mentre la parte di destra è scabra (indicata in figura con una linea in grassetto). Ad un certo istante, la massa m_1 viene lasciata libera e va ad urtare un secondo corpo di massa $m_2 = 1$ kg posto a $\theta = 0$. Nell'urto, completamente anelastico, si forma un unico sistema, di massa $M = m_1 + m_2$, che si muoverà con velocità V. Notare che un istante prima dell'urto la velocità di m_1 è orizzontale, così come la velocità

V immediatamente dopo. Il corpo M entra quindi nella parte della guida scabra ed inizia a salire lungo tale tratto. Nella salita agisce una forza di attrito F_A costante in modulo (NB. COSTANTE, non proporzionale in modulo alla reazione vincolare normale!!) che agisce sempre in verso opposto alla velocità con cui M sale lungo la guida. Sapendo che la quota massima a cui arriva M è $H = 3.806$ cm, determinare il modulo di F_A. Il moto avviene in presenza della gravità.

****

Esercizio 3



Un disco omogeneo di massa $M = 3$ kg e raggio $R = 0.5$ m è vincolato a ruotare in un piano orizzontale attorno ad un asse fisso passante per il suo centro. Ad un certo istante, quando la velocità angolare con cui sta ruotando vale $\omega_0 = 10$ rad/s, una pallina di massa $m = 1$ kg, lasciata libera di cadere dall'alto lungo la verticale, colpisce con velocità $v_0 = 3$ m/s il bordo del disco e vi rimane attaccata a causa di un urto completamente anelastico.

i) Determinare la velocità angolare del sistema disco+pallina immediatamente dopo l'urto.

ii) Determinare la perdita di energia meccanica del sistema disco+pallina a seguito dell'urto completamente anelastico.

iii) Immediatamente dopo l'urto, sul sistema disco+pallina agisce un momento frenante τ costante. Determinare il valore di τ sapendo che il sistema si ferma dopo $n = 10$ giri.

Esercizio 4

Una mole di gas perfetto monoatomico, inizialmente in equilibrio nello stato A, con $V_A = 12$ l e $P_A = 2$ atm, esegue una prima trasformazione isoterma reversibile, con cui la pressione del gas viene raddoppiata, seguita da una adiabatica reversibile con cui il gas viene portato nello stato finale C in cui $V_C = \frac{1}{4}V_A$. Disegnare le due trasformazioni nel piano di Clapeyron e determinare la variazione di energia interna e di entropia nel passaggio dallo stato A allo stato C.

Soluzione Esercizio 1

La fune è tesa, quindi i due corpi si muovono con la stessa accelerazione a. Le equazioni del moto sono:

$$m_1 a = m_1 g \sin\theta - \mu_1 m_1 g \cos\theta - T \tag{1}$$

$$m_2 a = m_2 g \sin\theta - \mu_2 m_2 g \cos\theta + T \tag{2}$$

Sommando le due equazioni si ottiene:

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 + m_1) g \sin\theta - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) g \cos\theta \tag{3}$$

e quindi

$$a = g\left[\sin\theta - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}\cos\theta\right] \tag{4}$$

Se la velocità del sistema è costante allora $a = 0$ e quindi:

$$\sin\theta = \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}\cos\theta \tag{5}$$

da cui

$$\tan\theta = \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} = 0.125 \tag{6}$$

Si ottiene infine θ =7,1°.

Soluzione Esercizio 2

Poiché il moto del corpo 1 prima dell'urto non è soggetto ad attriti, la velocità v_1 con cui arriva nella posizione $\theta = 0$ subito prima dell'urto si ricava dalla conservazione dell'energia meccanica:

$$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gR(1-\cos\theta_0)} = 1.7 \text{ m/s}\,. \tag{7}$$

Nell'urto anelastico si conserva la quantità di moto, quindi:

$$MV = m_1 v_1 \quad \rightarrow \quad V = \frac{m_1}{M} v_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 1.13 \text{ m/s}\,. \tag{8}$$

Applicando il teorema delle forze vive al moto del sistema che sale lungo la guida si ottiene:

$$-\frac{1}{2} M V^2 = -MgH + L_A \tag{9}$$

dove $L_A = -F_A R \theta_1$ è il lavoro della forza di attrito e θ_1, ovvero l'angolo rispetto alla normale alla fine della salita, si ricava da:

$$H = R(1-\cos\theta_1) \quad \rightarrow \quad \theta_1 = \arccos\left(1 - \frac{H}{R}\right) = \frac{\pi}{8} = 0.3927\,. \tag{10}$$

Sostituendo nella (9) si ottiene infine:

$$F_A = \frac{\frac{1}{2} M V^2 - MgH}{R\theta_1} = 4.05 \text{ N}\,. \tag{11}$$

Soluzione Esercizio 3

Poiché la velocità della pallina è parallela all'asse di rotazione del disco, essa non contribuisce alla componente $L_{\parallel}$ del momento angolare parallela ad esso. Nell'urto anelastico $L_{\parallel}$ si conserva, quindi:

$$I_0\omega_0 = (I_0 + mR^2)\omega_f \tag{12}$$

dove

$$I_0 = \frac{1}{2}MR^2 = 0.375 \text{ kg m}^2 \tag{13}$$

è il momento d'inerzia del disco. Quindi la velocità angolare del sistema dopo l'urto è:

$$\omega_f = \frac{I_0}{I_0 + mR^2}\omega_0 = 6.0 \text{ rad/s}\,. \tag{14}$$

L'energia meccanica prima e dopo l'urto sono:

$$E_0 = \frac{1}{2}I_0\,\omega_0^2 + \frac{1}{2}m\,v_0^2 = 23.25 \text{ J}\,, \tag{15}$$

$$E_f = \frac{1}{2}\left(I_0 + mR^2\right)\omega_f^2 = 11.25 \text{ J}\,. \tag{16}$$

La perdita di energia meccanica nell'urto è quindi $\Delta E = |E_f - E_0| = 12.0$ J.

Per il teorema delle forze vive abbiamo:

$$L_\tau = K_f - K_i = -K_i = -\frac{1}{2}\left(I_0 + mR^2\right)\omega_f^2 = -E_f\,. \tag{17}$$

D'altra parte si ha

$$L_\tau = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{d\theta} = -|\overrightarrow{\tau}| \int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = -|\overrightarrow{\tau}|\; 2\pi n\,. \tag{18}$$

Quindi in totale si ha:

$$|\overrightarrow{\tau}| = \frac{E_f}{2\pi n} = 0.18 \text{ N m}\,. \tag{19}$$

Soluzione Esercizio 4

Dall'equazione di stato dei gas perfetti si ricava:

$$T_A (= T_B) = \frac{P_A V_A}{R} = 292.7\ ^\circ\text{K}\,. \tag{20}$$

Poiché la trasformazione $A \to B$ è isoterma $P_B V_B = P_A V_A$, da cui $V_B = \frac{1}{2}V_A = 6$ l, quindi la trasformazione è una compressione.
Inoltre $\Delta U_{AB} = 0$ e, per il Primo Principio, $Q_{AB} = L_{AB}$. Quindi, si fa lavoro L_{AB} sul sistema, che cede il calore Q_{AB} all'ambiente. La variazione di entropia è quindi data da

$$\Delta S_{AB} = \frac{Q_{AB}}{T_A} = \frac{L_{AB}}{T_A} = R\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = R\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -5.76 \text{ J/}^\circ\text{K}\,. \tag{21}$$

La trasformazione $B \to C$ è un'adiabatica reversibile, quindi, per le formule di Poisson

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}\,, \tag{22}$$

da cui:

$$T_C = T_B \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} = T_B\,(2)^{2/3} = 464.6\ ^\circ\mathrm{K}\,. \tag{23}$$

dove abbiamo usato il fatto che il gas in considerazione è monoatomico e quindi $\gamma = 5/3$. Inoltre, siccome $Q = 0$, $\Delta S_{BC} = 0$. Per quanto riguarda l'energia interna, invece,

$$\Delta U_{BC} = \tilde{c}_V (T_C - T_B) = \frac{3}{2} R (T_C - T_A) = 2142.7\ \mathrm{J}\,. \tag{24}$$

Le variazioni totali di energia interna e di entropia sono quindi date da:

$$\Delta U_{AC} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} = \Delta U_{BC} = 2142.7\ \mathrm{J} \tag{25}$$

$$\Delta S_{AC} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} = \Delta S_{AB} = -5.76\ \mathrm{J}/^\circ\mathrm{K}\,. \tag{26}$$