Esame 24 Febbraio 2017

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

Dipartimento di Matematica

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Anno Accademico 2016-2017

Esame - Fisica Generale I
24 Febbraio 2017

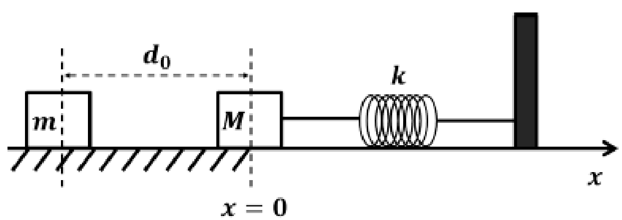
R. Bonciani, P. Dore

Regole per lo scritto

- RECUPERO 1° ESONERO: risolvere gli esercizi 1 e 2 in 2h.
- RECUPERO 2° ESONERO: risolvere gli esercizi 3 e 4 in 2h.
- COMPITO: risolvere gli esercizi 2, 3 e 4 (contrassegnati con $*$) in 3h.

Esercizio 1

Un corpo di massa M è poggiato su una guida orizzontale coincidente con l'asse x. Il corpo è inizialmente fermo nella posizione $x = 0$ ed è collegato, tramite una molla ideale di costante elastica k, ad una parete che si trova nel tratto $(0, +\infty)$ della guida, come in figura. Nel tratto $(-\infty, 0)$ della guida agisce una forza di attrito dinamico di coefficiente μ_d; il tratto $(0, +\infty)$ invece è liscio. Una seconda massa m, partendo dalla posizione $x = -d_0$ con velocità v_0, va ad urtare la massa M. Dopo l'urto la massa M inizia ad oscillare.

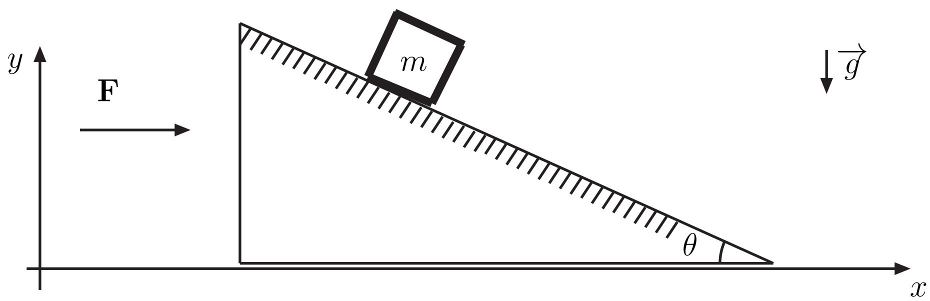


1. Nel caso in cui l'urto tra i due corpi sia perfettamente elastico, calcolare il tempo t_1 necessario affinché m passi nuovamente per la posizione iniziale $x = -d_0$, la posizione in cui si ferma, lo spostamento massimo di M rispetto alla posizione iniziale durante l'oscillazione nel tratto $(0, +\infty)$ e il tempo t_2 necessario perché M ripassi la prima volta per la posizione iniziale $x = 0$;
2. Nel caso in cui l'urto tra i due corpi sia perfettamente anelastico, calcolare lo spostamento massimo del sistema $M+m$ rispetto alla posizione iniziale durante l'oscillazione nel tratto $(0, +\infty)$ e il tempo t_2' necessario perché $M + m$ ripassi la prima volta per la posizione iniziale $x = 0$.
3. BONUS - In entrambi i casi precedenti dopo essere passato per la posizione iniziale il corpo (M se l'urto è elastico, $M + m$ se è anelastico) continua ad oscillare nel tratto $(-\infty, 0)$ della guida. Calcolare l'ampiezza massima della prima oscillazione nel tratto con attrito nei due casi.

Valori numerici: $m = 200$ g; $M = 1$ kg; $k = 2$ N/m; $d_0 = 0.5$ m; $v_0 = 3$ m/s; $\mu_d = 0.2$.

Esercizio 2 $*$

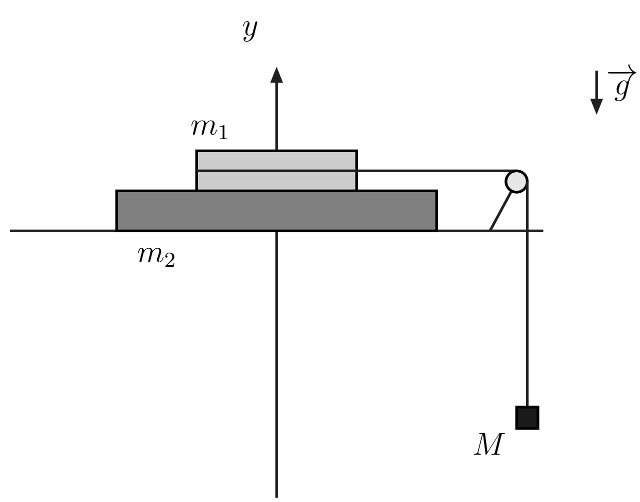
Un blocco di massa $M = 5$ kg è vincolato a scorrere su una guida orizzontale priva di attrito. Un punto materiale di massa $m = 300$ g è posto sulla faccia del blocco inclinata di un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Fra punto materiale e blocco c'è attrito con coefficiente di attrito statico $\mu_S = 0.2$. Sul blocco agisce una forza $\mathbf{F}$ costante diretta orizzontalmente (come in figura).



1. Calcolare i valori minimo e massimo di F affinché il punto rimanga in quiete rispetto al blocco.
2. Calcolare i corrispondenti valori dell'accelerazione del blocco.
3. Calcolare le reazioni esercitate sul blocco.

Esercizio 3 $*$

Un sistema è composto da due dischi metallici, omogenei, coassiali e fissati fra loro, rispettivamente di masse $m_1 = 2$ kg e $m_2 = 3$ kg e raggi $R_1 = 0.1$ m e $R_2 = 0.2$ m. Il sistema può ruotare senza attrito attorno all'asse y perpendicolare ai due dischi e passante per il loro centro di massa. Sul disco di massa m_1 è avvolto un filo ideale che, tramite una carrucola ideale (di massa nulla) è collegato alla massa $M = 1$ kg (vedi figura). Il sistema è soggetto alla forza di gravità.



1. A $t = 0$ la massa M, inizialmente ferma, viene lasciata libera. Calcolare il tempo t_0 che impiega M a scendere di 10 m.

2. Sul bordo di m_2 è fissato un piccolo magnete, di massa $m = 10$ g e dimensioni trascurabili, in maniera tale da non poter scivolare sul bordo. Il magnete è tenuto attaccato al disco da una forza magnetica radiale costante pari a 1.5 N. Al tempo t_0 il magnete sarà ancora attaccato al disco?

Esercizio 4 $*$

Una mole di gas perfetto monatomico, inizialmente nello stato A con $T_A = 500$ °K e volume V_A, compie una trasformazione ciclica reversibile composta da: una adiabatica AB che termina a $T_B = T_A/2$, una trasformazione reversibile BC di equazione $pV^2 = cost$, che porta il gas alla Temperatura $T_C = T_A$ ed un volume $V_C = \sqrt{2}V_A$ e infine da una isoterma reversibile che riporta Il sistema nello stato iniziale A.

1. Si disegni il ciclo sul piano di Clapeyron.

2. Si calcoli il lavoro compiuto dal gas in tutto il ciclo.

3. Si calcoli il suo incremento di entropia nella trasformazione BC.

Soluzione esercizio 1

Si trova la velocità v_1 con cui la massa m impatta su M con il teorema delle forze vive:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu_d mgd_0 \;\rightarrow\; v_1 = \sqrt{v_0^2 - \mu_d g d_0} = 2.83 \text{ m/s} \tag{1}$$

Il tempo t_A impiegato per raggiungere la massa M si trova considerando un moto uniformementa accelerato con accelerazione $a_1 = -\mu_d g = 1.96$ m/s^2:

$$0 = -d_0 + v_0 t_A - \frac{1}{2}\mu_d g t_A^2 \;\rightarrow\; t_A = \frac{v_0}{\mu_d g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{\mu_d g}\right)^2 - \frac{2d_0}{\mu_d g}} \tag{2}$$

scegliendo la minore delle due soluzioni si ricava $t_A = 0.18$ s.
Caso 1: urto elastico - applichiamo la conservazione della quantità di moto e dell'energia:

$$\begin{cases} mv_1 = MV_0 - mv_2 \\ \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}MV_0^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_2 = \frac{M-m}{M+m}v_1 = \frac{2}{3}v_1 = 1.89 \text{ m/s} \\ V_0 = \frac{2m}{M+m}v_1 = \frac{1}{3}v_1 = 0.94 \text{ m/s} \end{cases} \tag{3}$$

Dopo l'urto il corpo m compie un moto uniformemente accelerato con accelerazione $\mu_d g$, imponiamo il passaggio per $x = -d_0$ e troviamo il tempo del ritorno t_R:

$$-d_0 = -v_2 t_R + \frac{1}{2}\mu_d g t_R^2 \;\rightarrow\; t_R = \frac{v_2}{\mu_d g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_2}{\mu_d g}\right)^2 - \frac{2d_0}{\mu_d g}} \tag{4}$$

scegliendo la minore delle due soluzioni si ricava $t_R = 0.32$ s.
Il tempo necessario per tornare nella posizione iniziale è quindi $t_1 = t_A + t_R = 0.50$ s.
La distanza massima dalla posizione iniziale è l'ampiezza delle oscillazioni A_1 e il tempo per tornare in $x = 0$ è la metà del periodo T in assenza di attrito. Per calcolare periodo e ampiezza delle oscillazioni di M dopo l'urto:

$$\begin{cases} \omega = 2\pi\sqrt{\frac{k}{M}} \\ \frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}MV_0^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{k}} = 0.35 \text{ s} \\ A_1 = \sqrt{\frac{MV_0^2}{k}} = TV_0 = 0.66 \text{ m} \end{cases} \tag{5}$$

Caso 2: urto completamente anelastico - applichiamo la conservazione della quantità di moto:

$$mv_1 = (M+m)V_0' - mv_2' \;\rightarrow\; V_0' = \frac{m}{M+m}v_1 = \frac{1}{6}v_1 = 0.47 \text{ m/s} \tag{6}$$

Anche in questo caso è necessario calcolare l'ampiezza delle oscillazioni A_1' e la metà del periodo T' in assenza di attrito:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}T' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M+m}{k}} = 0.39 \text{ s} \\ A_1' = T'V_0' = 0.36 \text{ m} \end{cases} \tag{7}$$

BONUS: Quando il corpo ripassa per la posizione iniziale la prima volta la sua velocità è in modulo uguale a quella che aveva subito dopo l'urto. Quando invece raggiunge la massima

distanza dalla posizione iniziale la sua velocità è nulla.
Applicando il teorema delle forze vive nel caso dell'urto elastico si ricava quindi:

$$-\frac{1}{2}MV_0^2 = -\mu_d MgA_2 - \frac{1}{2}kA_2^2 \tag{8}$$

da cui:

$$A_2^2 + 2\mu_d g\frac{M}{k}A_2 - \frac{M}{k}V_0^2 = 0 \tag{9}$$

e quindi:

$$A_2 = -\mu_d g\frac{M}{k} \pm \sqrt{\mu_d^2 g^2\frac{M^2}{k^2} + V_0^2\frac{M}{k}} \tag{10}$$

Scegliendo la soluzione positiva si ottiene $A_2 = 0.20$ m.
Analogamente nel caso dell'urto anelastico:

$$A_2' = -\mu_d g\frac{M+m}{k} \pm \sqrt{\mu_d^2 g^2\frac{(M+m)^2}{k^2} + (V_0')^2\frac{(M+m)}{k}} = 0.055 \text{ m} \tag{11}$$

Soluzione esercizio 2

Dobbiamo considerare due casi:

1. La forza F è minima. In questo caso il punto materiale tenderebbe a scendere lungo il piano inclinato, se non fosse per la forza d'attrito che lo mantiene su. Il modulo di tale componente è massimo e pari al prodotto del coefficiente d'attrito per la reazione normale agente sul punto.

2. La forza F è massima. In questo caso il punto materiale tenderebbe a risalire lungo il piano inclinato, se non fosse per la forza d'attrito che lo mantiene su. Anche in questo caso Il modulo della componente tangenziale della reazione vincolare è massimo e pari al prodotto del coefficiente d'attrito per la reazione normale agente sul punto.

Siccome il punto deve essere in quiete rispetto al blocco, entrambi hanno la stessa accelerazione.

Dividiamo il sistema in due: blocco e punto materiale.

Primo caso

Le forze agenti sul blocco possono essere scomposte lungo le due direzioni x e y:

$$\begin{cases} M\ddot{x} = F - N\sin\theta + F_t\cos\theta\,, \\ 0 = -F_t\sin\theta + R_N - N\cos\theta - Mg \end{cases} \tag{12}$$

dove R_N è la reazione normale del suolo sul blocco e N e F_t sono rispettivamente la reazione normale e tangenziale agenti dal punto sul blocco.

Le forze agenti sul punto danno:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = N\sin\theta - F_t\cos\theta\,, \\ 0 = F_t\sin\theta + N\cos\theta - mg\,. \end{cases} \tag{13}$$

Inoltre

$$F_t = \mu_S N\,. \tag{14}$$

Dalla seconda di (13) si ottiene

$$N = \frac{mg}{\mu_S \sin\theta + \cos\theta} = \frac{2mg}{\mu_S + \sqrt{3}} = 3.05 \text{ N}\,, \tag{15}$$

che sostituita nella prima dà

$$\ddot{x}_{min} = g\frac{\sin\theta - \mu_S\cos\theta}{\mu_S \sin\theta + \cos\theta} = g\frac{1-\sqrt{3}\mu_S}{\mu_S + \sqrt{3}} = 3.32 \text{ m/s}^2\,. \tag{16}$$

Dalle prime equazioni di (12) e (13), poi, si trova

$$F_{min} = (m+M)\ddot{x}_{min} = 17.59 \text{ N}\,. \tag{17}$$

La seconda di (12) insieme alla seconda di (13) infine danno

$$R_N = (m+M)g = 60.0 \text{ N}\,. \tag{18}$$

Secondo caso
la reazione tangenziale cambia di verso ma rimane dello stesso modulo. Allora si ha

$$\ddot{x}_{max} = g\frac{\sin\theta + \mu_S\cos\theta}{-\mu_S \sin\theta + \cos\theta} = g\frac{1+\sqrt{3}\mu_S}{\sqrt{3} - \mu_S} = 8.62 \text{ m/s}^2\,. \tag{19}$$

Dalle prime equazioni di (12) e (13), poi, si trova

$$F_{max} = (m+M)\ddot{x}_{min} = 45.69 \text{ N}\,. \tag{20}$$

Con questi dati è possibile rispondere a tutte le domande dell'esercizio.

Si può anche ragionare considerando il punto materiale in un sistema di riferimento che accelera rispetto a quello fisso con allerelazione $\ddot{x}$. Siccome imponiamo che il punto sia fermo rispetto al blocco, possiamo immediatamente trovare l'accelerazione dei due usando il secondo principio

$$F = (m+M)\ddot{x}\,, \tag{21}$$

da cui

$$\ddot{x} = \frac{F}{(m+M)}\,. \tag{22}$$

Sel sistema di riferimento accelerato, il punto materiale è in equilibrio, soggetto alla forza peso, alla forza d'attrito e alla forza di trascinamento

$$F_{tr} = -m\ddot{x} = -\frac{m}{(m+M)}F\,. \tag{23}$$

Di conseguenza si puo' pensare ad un problema di statica in questo sistema di riferimento, trovando i due valori di F_{tr} e quindi di F, tramite le (23), e poi risalendo all'accelerazione dalla (22).

Soluzione esercizio 3

Il problema si può affrontare con le cardinali.

Dividiamo il sistema in due: blocchetto di massa M e volano. Orientiamo l'asse verticale verso il basso. Per il blocchetto possiamo scrivere lungo le y (direzione verticale)

$$M\ddot{y} = -T + Mg\,. \tag{24}$$

Al sistema dei due cilindri sarà applicata dunque la tensione T dalla corda. Questa sarà sempre perpendicolare al raggio R_1. Il sistema si comporta come fosse bidimensionale nel piano perpendicolare Scrivendo la componente y della seconda cardinale rispetto ad un punto sull'asse y si ottiene

$$R_1 T = I_{cm}\ddot{\theta}\,, \tag{25}$$

dove θ è l'angolo di rotazione del sistema intorno all'asse y preso positivo nel senso di svolgimento della corda.

L'accelerazione lineare $\ddot{y}$ e quella angolare sono legate dalla

$$R_1\ddot{\theta} = \ddot{y}\,, \tag{26}$$

che dice che $\ddot{y}$ è proprio l'accelerazione tangenziale del punto sul bordo del cilindro piccolo.

Il momento d'inerzia del sistema, I_{cm}, è dato da

$$I_{cm} = \frac{1}{2}(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) = 0.07 \text{ kg} \quad \text{m}^2\,. \tag{27}$$

Quindi l'accelerazione $\ddot{y}$ si trova sostituendo la tensione fra le (24,25) e utilizzando la (26):

$$\left(M + \frac{I_{cm}}{R_1^2}\right)\ddot{y} = Mg \tag{28}$$

ovvero

$$\ddot{y} = \frac{Mg}{\left(M + \frac{I_{cm}}{R_1^2}\right)} = 1.23 \text{ m/s}^2\,. \tag{29}$$

Il moto di M è uniformemente accelerato con accelerazione $\ddot{y}$, quindi per percorrere $\Delta y = 10$ m impiegherà

$$t_0 = \sqrt{\frac{2\Delta y}{\ddot{y}}} = 4.04 \text{ s}\,. \tag{30}$$

Per sapere se il piccolo magnete a $t = t_0$ è ancora attaccato al disco, dobbiamo sapere il valore della velocità angolare del sistema a $t = t_0$. Avremo

$$\dot{\theta}(t_0) = \int_0^{t_0} \ddot{\theta} dt = \frac{\ddot{y}}{R_1} t_0 = \frac{\sqrt{2\Delta y\,\ddot{y}}}{R_1} = 49.52 \text{ s}^{-1}\,. \tag{31}$$

Se ci mettiamo nel sistema di riferimento rotante con il cilindro (la giostra), il magnetino sarà soggetto a varie forze. Concentriamoci sulla componente radiale. La forza di attrazione magnetica sarà diretta verso il centro, in modulo costante N:

$$\mathbf{N} = -N\hat{\mathbf{u}}_r\,, \tag{32}$$

mentre l'altra forza che agisce sul magnete, la forza centripeta, sarà diretta sempre radialmente, ma lungo $\hat{\mathbf{u}}_r$:

$$\mathbf{F}_c = -m\omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{R}_2) = m\omega^2 R_2 \hat{\mathbf{u}}_r \,. \tag{33}$$

Il magnete rimarrà attaccato ad m_2 fintanto che F_c non superi in modulo N, ovvero

$$\omega \leq \sqrt{\frac{N}{mR_2}} = 27.39 \text{ s}^{-1} \,. \tag{34}$$

Quindi il magnete a $t = t_0$ non è più attaccato al cilindro.

Soluzione esercizio 4

1. Per disegnare la trasformazione nel piano di Clapeyron, consideriamo che per un gas perfetto monoatomico

$$\gamma = \frac{5}{3} < 2 \,. \tag{35}$$

Quindi la trasformazione BC è più pendente di AB.

2. Nella trasformazione AB, adiabatica, si ha

$$đQ = 0 = dU + đL = \tilde{c}_V dT + đL \,, \tag{36}$$

dove $\tilde{c}_V$ è il calore specifico molare del gas. Allora, si può calcolare il lavoro come

$$L_{AB} = -\int_A^B dU = -\tilde{c}_V(T_B - T_A) = \tilde{c}_V \frac{T_A}{2} = \frac{3}{4} R T_A = 3116 \text{ J} \,. \tag{37}$$

Lungo la trasformazione BC si ha $pV^2 = cost$, quindi anche $pV^2 = P_B V_B^2$. Il lavoro sarà dato da

$$L_{BC} = \int_{V_B}^{V_C} p\, dV = \int_{V_B}^{V_C} p_B V_B^2 \frac{dV}{V^2} = p_B V_B^2 \left(\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_C} \right) = p_B V_B \left(1 - \frac{V_B}{V_C} \right) \tag{38}$$

$$= R T_B \left(1 - \frac{V_B}{V_C} \right) \,. \tag{39}$$

Si ha anche che

$$1 = \frac{p_B V_B^2}{p_C V_C^2} = \frac{R T_B V_B}{R T_C V_C} = \frac{T_B V_B}{T_C V_C} \,, \tag{40}$$

ovvero

$$\frac{V_B}{V_C} = \frac{T_C}{T_B} \,, \tag{41}$$

da cui infine

$$L_{BC} = R T_B \left(1 - \frac{V_B}{V_C} \right) = R(T_B - T_C) = -2077 \text{ J} \,. \tag{42}$$

La trasformazione CA è isoterma, per cui

$$L_{CA} = R T_A \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right) = -\frac{1}{2} R T_A \ln 2 = -1440 \text{ J} \,. \tag{43}$$

Il lavoro totale è allora:

$$L_{tot} = -401 \text{ J} . \tag{44}$$

3. La trasformazione BC è reversibile, quindi ci possiamo calcolare la variazione di entropia direttamente:

$$dS = \frac{đQ}{T} = \tilde{c}_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T}\, dV = \tilde{c}_V \frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V} \, , \tag{45}$$

dove abbiamo usato l'equazione di stato dei gas perfetti. Integrando da B a C si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta S_{BC} &= S(C) - S(B) = \tilde{c}_V \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) + R\ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = \frac{3}{2} R\ln 2 - R\ln 2 \, , \\ &= \frac{1}{2} R\ln 2 = 2.88 \text{ J/K} . \end{aligned} \tag{46}$$

Un altro modo di procedere è considerare il fatto che per il ciclo la variazione di entropia è nulla:

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = 0 \, . \tag{47}$$

Inoltre, anche lungo la trasformazione adiabatica ($đQ = 0$) reversibile abbiamo

$$\Delta S_{AB} = 0 \, , \tag{48}$$

quindi

$$\Delta S_{BC} = -\Delta S_{CA} = -R \int_C^A \frac{dV}{V} = -R\ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) = \frac{1}{2} R\ln 2 = 2.88 \text{ J/K} . \tag{49}$$