Esame 24 Luglio 2018

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

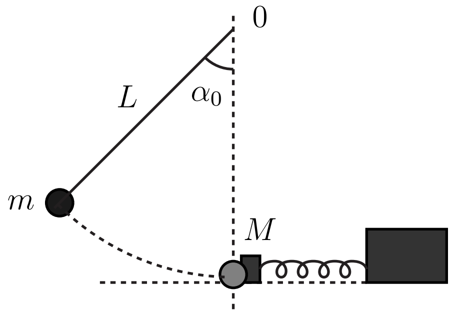
Dipartimento di Matematica

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Anno Accademico 2017-2018

Esercizio 1

Una pallina di massa $m = 0.5$ kg è agganciata all'estremità di un'asta di lunghezza $L = 1$ m e massa trascurabile, che ha l'altro estremo vincolato a ruotare senza attrito attorno ad un perno O. Inizialmente la pallina viene lasciata con velocità nulla quando l'asta forma un angolo di $\alpha_0 = 45°$ con la verticale.

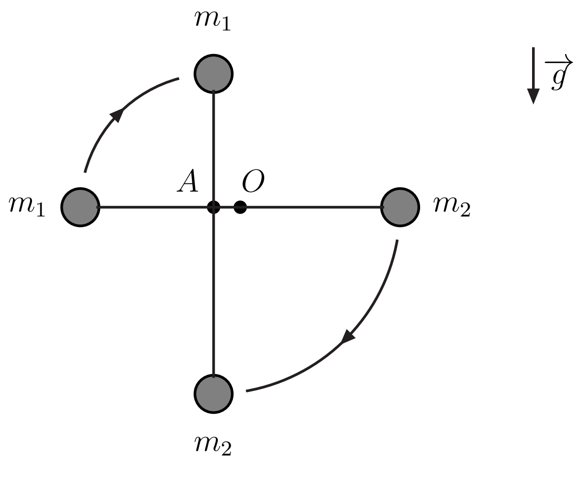


Quando l'asta passa per la verticale, la massa m urta in modo perfettamente elastico una massa $M = 1$ kg, collegata all'estremo libero di una molla di costante elastica $k = 10$ N/m, libera di scorrere senza attrito su un piano orizzontale. La molla è inizialmente in condizione di riposo, con l'altro estremo fisso.

- Determinare la velocità della massa m subito dopo l'urto in modulo, direzione e verso.
- Determinare la massima compressione della molla c_M in seguito all'utro.
- Descrivere il moto di m dopo l'urto, ed in particolare determinare la sua posizione quando la sua velocità si annulla per la prima volta.

Esercizio 2

Un'asta rigida, di massa trascurabile e lunghezza $L = 1.5$ m, è libera di ruotare in un piano verticale intorno ad un asse orizzontale passante per un suo punto A distante $d = 0.2$ m dal centro O.



Agli estremi dell'asta sono fissate due masse $m_1 = 300$ g e $m_2 = 600$ g. Il sistema, inizialmente posto in posizione orizzontale, è lasciato libero con velocità iniziale nulla. Calcolare:

- la velocità angolare della sbarra quando passa per la posizione verticale;
- La distanza dal centro O a cui deve essere sospesa l'asta se il periodo delle piccole oscillazioni del sistema è $\pi/2$ s.

Esercizio 3

In un ambiente in cui la pressione è trascurabile, si trova un cilindro chiuso da un pistone di massa $m = 5$ kg. Il cilindro contiene 15 g di azoto molecolare (N_2, massa molare 28 g/mol) all'equilibrio (approssimabile ad un gas perfetto), alla temperatura di $T_A = 20$ °C. Mettendo il cilindro a contatto con una sorgente a temperatura $T_B = 111$ °C il pistone si alza di $\Delta h = 20\ cm$.

1. Supponendo che gli stati iniziale e finale siano di equilibrio, calcolare il calore fornito al gas nella trasformazione $A \rightarrow B$.
2. Supponiamo adesso che il gas venga mantenuto al volume raggiunto V_B, costante, e che sia fatto raffreddare in maniera quasi statica fino allo stato C, con $V_C = V_B$ e $T_C = T_A$. Calcolare la variazione di entropia nella trasformazione $B \rightarrow C$.

Soluzione esercizio 1

- Utilizziamo la conservazione dell'energia per la massa m. Se v_f è la velocità della massa m quando urta la massa M, si ha:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgL(1-\cos\alpha_0)\,, \tag{1}$$

ovvero

$$v_f = \sqrt{2gL(1-\cos\alpha_0)} = 2.397 \text{ m/s}^2\,. \tag{2}$$

Durante l'urto, si considera il fatto che la forza elastica non è impulsiva. Si conserva allora l'impulso in direzione x, oltre che l'energia cinetica. Se v_m e v_M sono le velocità dopo l'urto della massa m e della M rispettivamente, si ha:

$$\begin{aligned} mv_f &= mv_m + Mv_M\,, && (3)\\ \frac{1}{2}mv_f^2 &= \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2\,. && (4) \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema, e scartando la soluzione banale, si ottiene

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{m-M}{m+M}v_f = -0.799 \text{ m/s}\,, && (5)\\ v_M &= 2\frac{m}{m+M}v_f = 1.598 \text{ m/s}\,. && (6) \end{aligned}$$

Se ne deduce che la velocità di m dopo l'urto ha verso opposto a v_f.

- Sempre utilizzando la conservazione dell'energia si trova che la massima compressione della molla, Δx, si ottiene da

$$\frac{1}{2}Mv_M^2 = \frac{1}{2}k\Delta x^2\,, \tag{7}$$

ovvero

$$\Delta x = \sqrt{\frac{M}{k}}v_M = 2\sqrt{\frac{M}{k}}\frac{m}{m+M}v_f = 50.5 \text{ cm}\,. \tag{8}$$

- La massa m quindi urta contro la massa M e inverte la sua velocità che dopo l'urto ha modulo $|v_m|$. Il moto di m sarà quindi tale da far risalire la massa collegata alla sbarra fino ad un'altezza

$$\Delta h = \frac{v_m^2}{2g} = 0.033 \text{ m}\,. \tag{9}$$

Soluzione esercizio 2

- Il momento d'inerzia del bilancere rispetto all'asse passante per A è dato da

$$I_A = m_1\left(\frac{L}{2}-d\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}+d\right)^2 = (m_1+m_2)\left(\frac{L^2}{4}+d^2\right) + (m_2-m_1)Ld$$

$$= \tag{10}$$

Per la conservazione dell'energia meccanica si ha

$$0 = \frac{1}{2} I_A \omega_f^2 + m_1 g \left(\frac{L}{2} - d \right) - m_2 g \left(\frac{L}{2} + d \right) , \tag{11}$$

da cui

$$\omega_f = \sqrt{\frac{2g}{I_A} \left((m_2 - m_1) \frac{L}{2} + (m_2 + m_1) d \right)} = 3.55 \text{ s}^{-1} \, . \tag{12}$$

- Il bilanciere è un pendolo composto. Se il centro di massa G dista l_G dall'asse di rotazione A, si ha che il periodo delle piccole oscillazioni è dato da

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{(m_1 + m_2) g l_G}} \, . \tag{13}$$

Quindi dovremo esprimere anche l_G in funzione di d e trovare d tale che $T = \pi/2$. Si ha

$$l_G = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \left(\frac{L}{2} - d \right) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{L}{2} + d \right) = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \frac{L}{2} + d \tag{14}$$

e dovrà essere

$$\frac{T^2 (m_1 + m_2) g}{4\pi^2} = \frac{I_A}{l_G} \, , \tag{15}$$

da cui

$$I_A - \frac{T^2 (m_1 + m_2) g}{4\pi^2} l_G = 0 \, , \tag{16}$$

che è un'equazione di secondo grado in d:

$$d^2 + \left\{ \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} L - \frac{T^2 g}{4\pi^2} \right\} d - \frac{T^2 g}{4\pi^2} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \frac{L}{2} + \frac{L^2}{4} = 0 \, . \tag{17}$$

Le due soluzioni sono:

$$\begin{aligned} d_{1,2} &= \frac{1}{2} \frac{T^2 g}{4\pi^2} - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \frac{L}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} L - \frac{T^2 g}{4\pi^2} \right\}^2 + 2 \frac{T^2 g}{4\pi^2} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} L - L^2} \, , \\ &= \frac{1}{2} \frac{T^2 g}{4\pi^2} - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \frac{L}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} L \right\}^2 + \left\{ \frac{T^2 g}{4\pi^2} \right\}^2 - L^2} \, , \\ &= \frac{1}{2} \frac{T^2 g}{4\pi^2} - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \frac{L}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ \frac{T^2 g}{4\pi^2} \right\}^2 - 4 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} L^2} \end{aligned} \tag{18}$$

Imponendo $T = \pi/2$, si trova che il determinante sotto radice è negativo! Quindi non è possibile trovare un d tale che il periodo delle piccole oscillazioni sia $T = \pi/2$.

Soluzione esercizio 3

1. La trasformazione $A \to B$ è irreversibile. Però il lavoro fatto dal gas viene compiuto contro la forza di gravità che agisce sul pistone e che quindi è costante. Col teorema delle forze vive, poiché $T_B = T_A = 0$, si trova tale lavoro

$$L_{AB} = mgh = 9.81 \text{ J}\,. \tag{19}$$

   Se l'azoto può essere approssimato ad un gas perfetto biatomico, si ha che

$$dU = n\, c_V\, dT\,, \tag{20}$$

   dove $n = 0.536$ mol e quindi, nella trasformazione

$$\Delta U_{AB} = n\, c_V\, (T_B - T_A) = \frac{5}{2}\, n\, R(T_B - T_A) = 1013.8 \text{ J}\,. \tag{21}$$

   Quindi, per il primo principio

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} + L_{AB} = 1023.61 \text{ J}\,. \tag{22}$$

2. La trasformazione $B \to C$ è una isocora quasi statica. Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} đL &= 0\,, & (23)\\ dQ &= dU = n\, c_V\, dT\,. & (24)\end{aligned}$$

   La variazione di entropia è data da

$$S_{BC} = \int_B^C \frac{dQ}{T} = n\, c_V \int_{T_B}^{T_A} \frac{dT}{T} = n\, c_V\, \ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right) = -3.03\ J/K\,. \tag{25}$$