Esame 28 Gennaio 2019

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1
Università degli Studi di Roma “La Sapienza”
Anno Accademico 2018-2019

Regole per lo scritto:

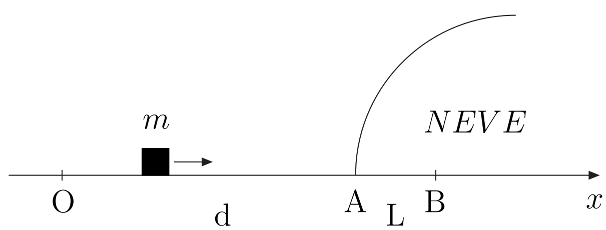
- RECUPERO 1° ESONERO: risolvere gli esercizi 1 e 2 in 3h.
- RECUPERO 2° ESONERO: risolvere gli esercizi 3 e 4 in 3h.
- COMPITO: risolvere gli esercizi 1, 3 e 4 in 3h.

Esercizio 1*

Un blocco di massa $m = 18$ kg poggiato su una superficie orizzontale liscia è inizialmente in quiete nel punto O ($x = 0$). Il blocco viene poi spinto da una forza diretta orizzontalmente di modulo $F = (2x + 9)$ N e dopo essere arrivato nel punto A, avendo percorso la distanza $d = \overline{OA} = 3$ m, va ad infilarsi in un grosso mucchio di neve. Nella neve il blocco è frenato da una forza, sempre diretta orizzontalmente, di modulo R (da considerarsi costante), fino a fermarsi nel punto B dopo aver percorso una distanza $L = \overline{AB} = 40$ cm.

Calcolare

1. la velocità del blocco in A;
2. il modulo di R;
3. in quanto tempo il blocco si ferma.

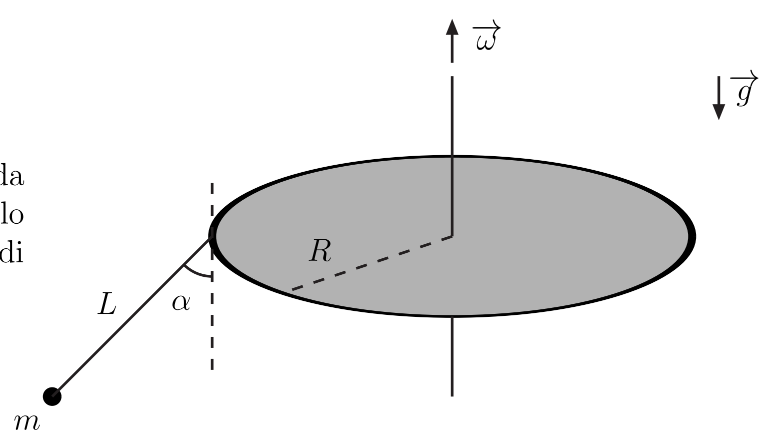


Esercizio 2

Una piattaforma circolare di raggio $R = 4$ m ruota in un piano orizzontale attorno ad un asse verticale passante per il suo centro, con velocità angolare ω costante. Una corda ideale di lunghezza $L = 5$ m ha un estremo fisso sul bordo, mentre all'altra estremità è appesa una massa $m = 1.5$ kg. In condizioni di "equilibrio dinamico", la corda forma con la verticale un angolo $\alpha = \pi/4$.

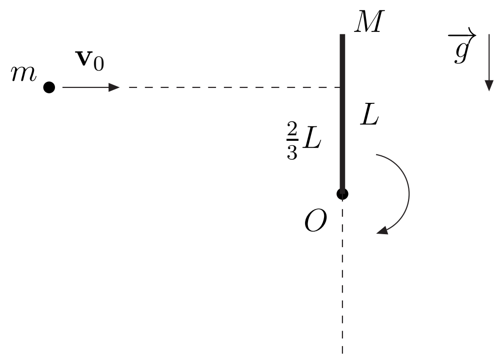
Calcolare:

1. la tensione della corda;
2. la velocità angolare ω.
3. Ad un certo istante la corda viene recisa. Qual'è il modulo e la direzione della velocità di m in quell'istante?



Esercizio 3*

Un'asta omogenea di lunghezza $L = 1.2$ m e massa $M = 1.3$ kg è vincolata a ruotare in un piano verticale attorno ad un perno O. All'istante $t = 0$ è posta verticalmente, ferma, nella posizione di equilibrio instabile, quando viene urtata, a $2/3L$ da O, da un proiettile mi massa $m = 0.6$ kg che procede orizzontalmente con velocità $v_0 = 53$ m/s.



1. Se l'urto è completamente anelastico (e quindi il proiettile dopo l'urto rimane attaccato all'asta), qual'è la velocità angolare del sistema quando ha ruotato di π, raggiungendo la posizione verticale più bassa?

2. Se l'urto è elastico, quali sono la velocità del proiettile e la velocità angolare dell'asta subito dopo l'urto?

3. Nella situazione della domanda 1. (urto anelastico), quale dovrebbe essere il modulo di un momento frenante τ agente sul perno per far sì che il sistema arrivi nella posizione verticale più bassa e lì si fermi?

Esercizio 4*

Un gas perfetto biatomico compie un ciclo costituito da due trasformazioni reversibili. La prima, dallo stato A, con $p_A = 10$ bar e $V_A = 3$ l, arriva allo stato B, con $V_B = 9$ l, attraverso la trasformazione data dal segmento rettilineo passante per A e B e descritta dalla seguente relazione:

$$p(V) = p_A + \frac{p_A - p_B}{V_A - V_B}(V - V_A)\,.$$

La seconda, dallo stato B torna ad A lungo un'adiabatica che collega A e B.

1. Trovare p_B.

2. Trovare il calore Q assorbito dal gas durante il ciclo.

3. Calcolare la variazione di entropia $\Delta S = S(B) - S(A)$ dal punto A al punto B considerando una sola mole di gas.

Soluzione Esercizio 1

1. Per trovare la velocità del blocco in A utilizziamo il teorema delle forze vive. Si ha
$$L_{OA} = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_O^2 = \frac{1}{2}mv_A^2\,. \tag{1}$$
D'altra parte, si ha
$$L_{OA} = \int_A^O F\,dx = \int_0^d (2x+9)\,dx = \left.(x^2+9x)\right|_0^d = d(d+9) = 36\ \mathrm{J}\,. \tag{2}$$
Quindi
$$v_A = \sqrt{\frac{2L_{OA}}{m}} = 2\ \mathrm{m/s}\,. \tag{3}$$

2. Nel tratto AB il blocco si ferma a causa della forza R costante. Si può applicare di uovo il teorema delle forze vive
$$L_{AB} = -\frac{1}{2}mv_A^2 = -L_{OA}\,. \tag{4}$$
D'altra parte
$$L_{AB} = -\int_A^B R\,dx = -R\int_A^B dx = -R\,L\,. \tag{5}$$
Quindi
$$R = \frac{L_{OA}}{L} = 90\ \mathrm{N}\,. \tag{6}$$

3. Per il "teorema dell'impulso" si ha
$$\int_0^t (-R\hat{\imath})\,dt = -R\hat{\imath}\,t = -mv_A\hat{\imath}\,, \tag{7}$$
da cui si ricava
$$t = \frac{mv_A}{R} = 0.4\ \mathrm{s}\,. \tag{8}$$

Soluzione Esercizio 2

1. Se la situazione è stazionaria, la massa m si muove di moto circolare uniforme intorno all'asse di rotazione, ad una distanza da questa pari a
$$d = R + L\sin\alpha = 7.54\ \mathrm{m}\,. \tag{9}$$
La componente verticale della tensione della corda deve annullare la forza di gravità, mentre la componente orizzontale, che è diretta lungo il raggio verso l'asse di rotazione, sarà pari alla massa m per l'accelerazione centripeta:
$$T\cos\alpha = mg\,, \tag{10}$$
$$T\sin\alpha = m\omega^2 d = m\omega^2(R + L\sin\alpha)\,. \tag{11}$$
Risolvendo il sistema si trova
$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = 20.8\ \mathrm{N} \tag{12}$$

2. e dall'altra equazione

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{d}\tan\alpha} = \sqrt{\frac{g}{d}} = 1.14 \text{ s}^{-1}\,. \tag{13}$$

3. Siccome la massa m fa un moto circolare uniforme, al momento della rescissione della fune la sua velocità sarà tangente alla traiettoria (ovvero perpendicolare all'asse di rotazione e al raggio R della ruota) e di modulo

$$v = d\omega = 8.56 \text{ m/s}\,. \tag{14}$$

Soluzione Esercizio 3

1. Se consideriamo come polo per il calcolo dei momenti il punto O, agendo le forze impulsive proprio in O, possiamo utilizzare il fatto che il momento angolare del sistema subito prima e subito dopo l'urto rimane lo stesso

$$L_O^f = L_O^i\,, \tag{15}$$

dove

$$L_O^i = mv_0\frac{2}{3}L\,, \tag{16}$$

mentre

$$L_O^f = I_O\omega_0\,, \tag{17}$$

dove I_O è il momento d'inerzia del sistema rispetto ad O e quindi

$$I_O = \frac{1}{3}ML^2 + \frac{4}{9}mL^2 = 1.01 \text{ kg} \quad \text{m}^2 \tag{18}$$

Si ricava quindi la velocità angolare con cui il sistema parte dalla posizione verticale subito dopo l'urto

$$\omega_0 = \frac{2mv_0L}{3I_O} = \frac{6mv_0}{(3M+4m)L} = 25.24 \text{ s}^{-1}\,. \tag{19}$$

Per trovare la velocità angolare finale, si usa la conservazione dell'energia meccanica

$$\frac{1}{2}I_O\omega_f^2 - \frac{1}{2}I_O\omega_0^2 = MgL + mg\frac{4}{3}L = \frac{(3M+4m)gL}{3} \tag{20}$$

e quindi

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2(3M+4m)gL}{3I_O}} = 26.19 \text{ s}^{-1}\,. \tag{21}$$

2. Se l'urto è elastico, possiamo applicare l'invarianza del momento angolare rispetto ad O e anche la conservazione dell'energia cinetica durante l'urto, in modo tale da poter scrivere due equazioni nelle due incognite del problema. Se v_f è la velocità del proiettile dopo l'urto, si ha

$$
\begin{aligned}
mv_0\frac{2}{3}L &= mv_f\frac{2}{3}L + I_O\omega\,, \qquad (22)\\
mv_0^2 &= mv_f^2 + I_O\omega^2\,. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

Il sistema ha una soluzione banale

$$v_f = v_0\,,\quad \omega = 0 \qquad (24)$$

che scartiamo e una soluzione non banale:

$$
\begin{aligned}
v_f &= -v_0 + \frac{8L^2mv_0}{9I_O + 4L^2m} = -23.76\ \mathrm{m/s}\,, \qquad (25)\\
\omega &= \frac{12Lmv_0}{9I_O + 4L^2m} = 36.55\ \mathrm{s}^{-1}\,. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

3. Se vogliamo che il sistema arrivi fermo nella posizione verticale più bassa, si dovrà avere

$$L_{1,2} = T_2 - T_1 = -\frac{1}{2}I_O\omega_0^2\,, \qquad (27)$$

dove

$$L_{1,2} = V_1 - V_2 + \int_1^2 \tau\cdot d\theta = MgL + mg\frac{4}{3}L - \tau\pi\,. \qquad (28)$$

Quindi

$$\tau = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}I_O\omega_0^2 + MgL + mg\frac{4}{3}L\right) = 55.2\ \mathrm{Nm} \qquad (29)$$

Soluzione Esercizio 4

1. Siccome A e B sono sulla stessa adiabatica, possiamo sfruttare le equazioni di Poisson

$$p_AV_A^\gamma = p_BV_B^\gamma\,, \qquad (30)$$

da cui, sapendo che $\gamma = 7/5$, si ha

$$p_B = p_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^\gamma = 2.15\ \mathrm{bar}\,. \qquad (31)$$

2. Dal Primo Principio, abbiamo che

$$\Delta Q = \Delta L\,, \qquad (32)$$

dove ΔQ e ΔL sono rispettivamente il calore e il lavoro meccanico scambiati con l'ambiente. Quindi per ottenere ΔQ basta calcolare ΔL.

$$\Delta L = L_{A\gamma_1B} + L_{B\gamma_2A}\,, \qquad (33)$$

dove

$$L_{A\gamma_1 B} = \frac{1}{2}(p_A + p_B)(V_B - V_A) = 3644.4 \text{ J} \tag{34}$$

è il lavoro lungo la trasformazione data dalla (1), e

$$\begin{aligned} L_{B\gamma_2 A} &= \int_{V_B}^{V_A} p_A \left(\frac{V_A}{V}\right)^{\gamma} dV \, , && (35) \\ &= p_A V_A^{\gamma} \frac{1}{1-\gamma} \, V^{1-\gamma}\Big|_{V_B}^{V_A} \, , && (36) \\ &= \frac{p_A V_A}{1-\gamma}\left[1 - \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{1-\gamma}\right] = -2667.0 \text{ J} \, . && (37) \end{aligned}$$

In totale, allora

$$\Delta Q = L_{A\gamma_1 B} + L_{B\gamma_2 A} = 977.3 \text{ J} = 233.8 \text{ cal} \, . \tag{38}$$

3. Per trovare ΔS basta considerare il fatto che i due stati A e B stanno su un'adiabatica reversibile ($\not{d}Q^{rev} = 0$). Ciò assicura automaticamente che

$$\Delta S = S(B) - S(A) = 0 \, . \tag{39}$$