Esame 28 Giugno 2017

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

Dipartimento di Matematica

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

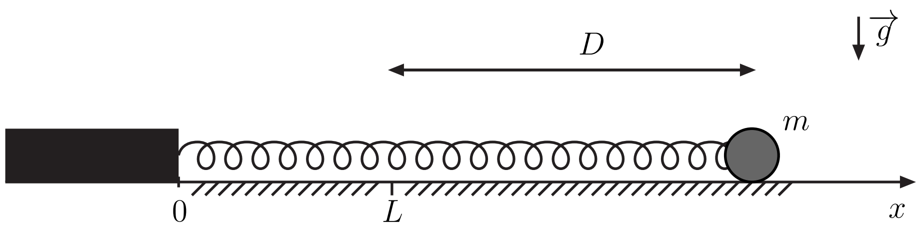
Anno Accademico 2016-2017

Esame - Fisica Generale I
28 Giugno 2017

R. Bonciani, P. Dore

Esercizio 1

Una molla ideale (massa nulla, costante elastica $k = 19.6$ N/m e lunghezza a riposo $L =$ 40 cm) è poggiata su una guida orizzontale. Un estremo è fissato nel punto O, mentre all'altro estremo è agganciato un punto materiale di massa $m = 100$ g. La guida è scabra e il coeffiente d'attrito dinamico fra m e guida è $\mu_d = 0.5$. Inizialmente la molla è allungata di un tratto $D = 30$ cm. Quando viene lasciata libera, la massa m inizia ad oscillare.

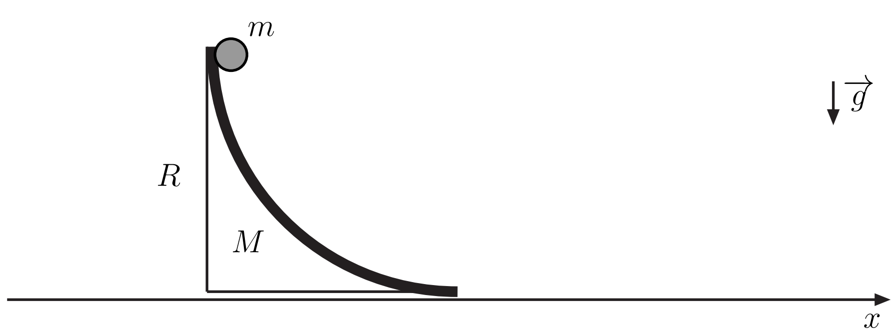


Determinare

1. La distanza minima da O raggiunta da m.
2. La velocità con cui m passa la seconda volta per L (considerare che l'attrito statico è tale che m, fermatosi nel punto di minima distanza da O, possa ripartire sotto l'azione della molla).

Esercizio 2

Una massa puntiforme $m = 200$ g parte da ferma dall'altezza $R = 50$ cm e si muove lungo un blocco di massa $M = 1$ kg con profilo a forma di quarto di circonferenza di raggio R. Il blocco è disposto in un piano verticale ed è libero di muoversi senza attrito su di un piano orizzontale (asse delle x). La superficie di contatto fra blocco e punto materiale è scabra.

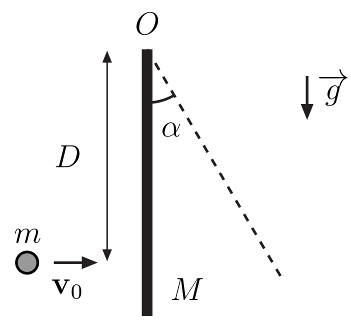


Sapendo che m arriva alla base del blocco con velocità pari a $v_0 = 0.5$ m/s in modulo, calcolare:

1. La velocità finale del blocco di massa M.
2. Il lavoro fatto dalla forza d'attrito.

Esercizio 3

Un'asta di lunghezza $L = 50$ cm e massa $M = 0.5$ kg è libera di ruotare attorno al suo estremo O in un piano verticale (in presenza di gravità). Un proiettile di massa $m = 0.2$ kg e velocità iniziale $v_0 = 5$ m/s orizzontale, si conficca nell'asta a distanza $D = 30$ cm da O (urto perfettamente anelastico).



Determinare l'angolo massimo α di oscillazione del sistema dopo l'urto.

Esercizio 4

Un blocco di rame di massa $m_R = 300$ g e temperatura $T_R = 97$ °C (con calore specifico $c_R = 385$ J/kg K) viene posto in un calorimetro ideale riempito con una massa $m_A = 100$ g di acqua alla temperatura $T_A = 7$ °C (calore specifico $c_A = 4186$ J/kg K). Determinare la variazione di entropia del sistema al raggiungimento dell'equilibrio termico.

Esercizio 5

Un gas perfetto monoatomico, in equilibrio nello stato A (a p_A, V_A e T_A), viene riscaldato in maniera irreversibile mantenendo il suo volume costante fino a raggiungere lo stato di equilibrio B, a pressione p_B e temperatura $T_B = 300$ K. In conseguenza di questo riscaldamento, il gas subisce una variazione di entropia di $\Delta S = 4$ J/K. Successivamente, il gas torna alla pressione iniziale, p_A, tramite una trasformazione isoterma reversibile, che lo porta allo stato di equilibrio C con $p_C = p_A$ e volume V_C. Calcolare il lavoro compiuto dal gas nella trasformazione dallo stato A allo stato C.

Soluzione esercizio 1

1. La distanza minima da O (indichiamola con x_1) viene raggiunta dopo il primo semi periodo. Utilizziamo il teorema delle forze vive.

   L'energia iniziale è tutta potenziale e vale

$$E_{in} = \frac{1}{2}kD^2 \,. \tag{1}$$

   Dopo il primo semi periodo il punto si ferma e di nuovo l'energia finale è tutta potenziale

$$E_{fin} = \frac{1}{2}k(L - x_1)^2 \,. \tag{2}$$

   Il teorema delle forze vive dice che

$$L_{Dx_1} = T_{x_1} - T_D = 0 \,, \tag{3}$$

   poiché l'energia cinetica iniziale e quella finale sono nulle. D'altra parte

$$L_{Dx_1} = \frac{1}{2}kD^2 - \frac{1}{2}k(L - x_1)^2 + \int_{L+D}^{x_1} \mathbf{F}_{attr} \cdot d\mathbf{x} \,. \tag{4}$$

   La forza d'attrito è costante e ha come modulo

$$F_{attr} = mg\mu_d \tag{5}$$

   e si oppone al moto del punto. Quindi, alla fine si ottiene la seguente equazione

$$\frac{1}{2}kD^2 - \frac{1}{2}k(L - x_1)^2 - \mu_d mg(L + D - x_1) = 0 \,. \tag{6}$$

   Per trovare x_1 dobbiamo quindi risolvere l'equazione di secondo grado

$$x_1^2 - 2\left[\frac{\mu_d mg}{k} + L\right] x_1 - D^2 + L^2 + 2\frac{\mu_d mg}{k}(L + D) = 0 \,. \tag{7}$$

   Le due soluzioni sono

$$x_1 = \frac{\mu_d mg}{k} + L \pm \sqrt{\left[\frac{\mu_d mg}{k} + L\right]^2 + D^2 - L^2 - 2\frac{\mu_d mg}{k}(L + D)} \,. \tag{8}$$

   Quindi, abbiamo le due soluzioni

$$x_1^+ = 0.7 \text{ m} \,, \tag{9}$$
$$x_1^- = 0.15 \text{ m} \,. \tag{10}$$

   La soluzione x_1^+ non è accettabile e si prende

$$x_1 = x_1^- = 15 \text{ cm} \,. \tag{11}$$

2. Per trovare la velocità in L si utilizza di nuovo il teorema delle forze vive. Il punto riparte da fermo in x_1 soggetto alla forza elastica e alla forza d'attrito. Si ha

$$L_{x_1 L} = \frac{1}{2} m v^2 \tag{12}$$

e

$$L_{x_1 L} = \frac{1}{2} k (L - x_1)^2 + \int_{x_1}^{L} \mathbf{F}_{attr} \cdot d\mathbf{x} = \frac{1}{2} k (L - x_1)^2 - m g \mu_d (L - x_1)\,. \tag{13}$$

Quindi, prendendo il valore positivo della velocità:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(L - x_1)^2 - 2\mu_d g (L - x_1)} = 3.13 \text{ m/s}\,. \tag{14}$$

Soluzione esercizio 2

1. L'unica forza esterna che agisce sul sistema è la forza di gravità, che è diretta lungo l'asse delle y. Quindi durante il moto si conserva la componente x della quantità di moto del sistema. Se V_x è la velocità finale del blocco, visto che v_0, velocità finale del punto materiale, è diretta lungo l'asse delle x, si ha

$$M V_x + m v_0 = 0\,, \tag{15}$$

da cui

$$V_x = -\frac{m}{M} v_0 = -0.1 \text{ m/s}\,. \tag{16}$$

2. Per trovale il lavoro della forza d'attrito, L_{attr}, utilizziamo il teorema delle forze vive. Si ha

$$L = T_{fin} - T_{in}\,. \tag{17}$$

L'energia cinetica finale del sistema è data dalla somma delle energie cinetiche delle due parti:

$$T_{fin} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} M V_x^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right)\,, \tag{18}$$

mentre $T_{in} = 0$. D'altra parte, il lavoro totale L è dato dal lavoro compiuto dalla forza d'attrito e dal lavoro della forza peso

$$L = mgR + L_{attr}\,. \tag{19}$$

Quindi, in totale si ha

$$L_{attr} = T_{fin} - mgR = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right) - mgR = -0.95 \text{ J}\,. \tag{20}$$

Soluzione esercizio 3

Siccome le reazioni vincolari sono concentrate in O, utilizzando la seconda cardinale impulsiva centrata in O abbiamo che il momento della quantità di moto subito dopo l'urto è uguale al momento della quantità di moto subito prima dell'urto (poiché il momento delle forze impulsive rispetto ad O si annulla):

$$L_O^{in} = L_O^{fin}\,, \tag{21}$$

dove

$$L_O^{in} = m v_0 D \tag{22}$$

e

$$L_O^{fin} = I_{tot}\omega_0\,, \tag{23}$$

dove

$$I_{tot} = \frac{1}{3}ML^2 + mD^2 = 0.06 \text{ kg m}^2\,. \tag{24}$$

Si ricava quindi la velocità angolare iniziale

$$\omega_0 = \frac{m v_0 D}{I_{tot}} = 5.03 \text{ s}^{-1}\,. \tag{25}$$

Subito dopo l'urto anelastico l'energia si conserva e quindi possiamo ricavare l'angolo massimo α dalla conservazione dell'energia, ammettendo che in α il sistema sia fermo (solo energia potenziale):

$$\frac{1}{2}I_{tot}\omega_0^2 = g\left(M\frac{L}{2} + mD\right)(1-\cos\alpha)\,. \tag{26}$$

Si ottiene

$$\alpha = \arccos\left(1 - \frac{I_{tot}\omega_0^2}{g(LM+2mD)}\right) = 0.95 \text{ rad}\,. \tag{27}$$

Soluzione esercizio 4

Troviamo la temperatura di equilibrio T_{eq}. Si ha

$$m_R c_R (T_R - T_{eq}) = m_A c_A (T_{eq} - T_A)\,, \tag{28}$$

da cui

$$T_{eq} = \frac{m_R c_R T_R + m_A c_A T_A}{m_R c_R + m_A c_A} = 299.6 \text{ K}\,. \tag{29}$$

La variazione di entropia sarà data dalla somma delle variazioni dei due materiali.

$$\Delta S_R = \int_{T_R}^{T_{eq}} \frac{dQ}{T} = m_R c_R \int_{T_R}^{T_{eq}} \frac{dT}{T} = m_R c_R \ln\left(\frac{T_{eq}}{T_R}\right) = -24.42 \text{ J/K}\,, \tag{30}$$

$$\Delta S_A = \int_{T_A}^{T_{eq}} \frac{dQ}{T} = m_A c_A \int_{T_A}^{T_{eq}} \frac{dT}{T} = m_A c_A \ln\left(\frac{T_{eq}}{T_A}\right) = 28.12 \text{ J/K}\,, \tag{31}$$

con

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_R + \Delta S_A = 3.7 \text{ J/K}\,. \tag{32}$$

Soluzione esercizio 5

Lungo la trasformazione irreversibile non è possibile calcolare la differenza di entropia, ma possiamo considerare una trasformazione analoga, isocora reversibile, e trovare che

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T} = nc_V \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = nc_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) . \tag{33}$$

Nella trasformazione $A \to B$ il lavoro è nullo (isocora). Quindi dobbiamo considerare il lavoro fatto nella trasformazione $B \to C$. Trattandosi di una isoterma reversibile si ha

$$L_{BC} = nRT_B \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) . \tag{34}$$

Considerando che $V_B = V_A$ e $P_A = p_C$ e che $p_A V_B = nRT_A$ e $p_A V_C = nRT_B$, si ha

$$L_{BC} = nRT_B \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = nRT_B \frac{\Delta S}{nc_V} = \frac{2T_B \Delta S}{3} = 800 \text{ J} . \tag{35}$$