Esame 29 Gennaio 2018

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

Dipartimento di Matematica

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

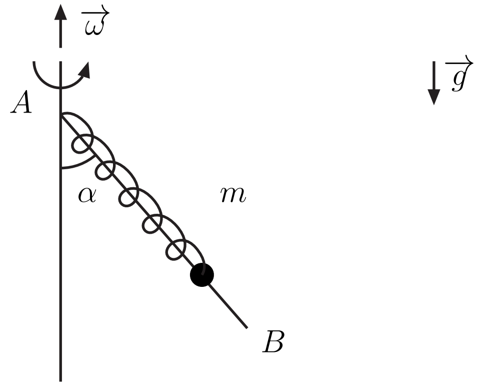
Anno Accademico 2017-2018

Regole per lo scritto:

- RECUPERO 1° ESONERO: risolvere gli esercizi 1 e 2 in 2h.
- RECUPERO 2° ESONERO: risolvere gli esercizi 3 e 4 in 2h.
- COMPITO: risolvere gli esercizi 1, 3 e 4 in 3h.

Esercizio 1 $*$

Una pallina di massa $m = 20$ g è vincolata a muoversi su una guida rettilinea inclinata di un angolo $\alpha = \pi/6$ FISSO rispetto alla verticale, intorno a cui ruota con velocità angolare $\omega = 2$ rad/s costante. La pallina è inoltre collegata tramite una molla di costante elastica $k = 1$ N/m e lunghezza di riposo nulla al punto A, indicato in figura.

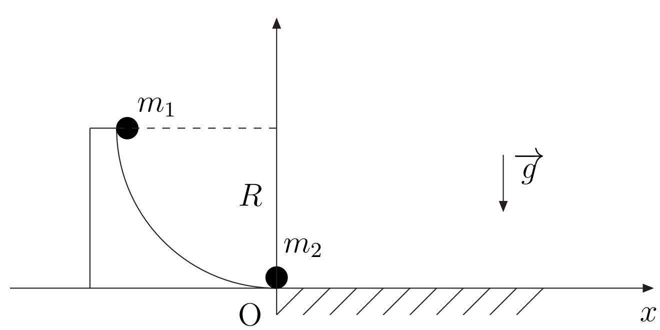


Calcolare:

1. la posizione di equilibrio della pallina, ferma rispetto al sistema di riferimento in moto;
2. la reazione vincolare esercitata dalla guida nella posizione di equilibrio;
3. il periodo delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio.

Esercizio 2

Un punto materiale di massa $m_1 = 500$ g viene lasciato da fermo alla sommità di una guida liscia costituita da un quarto di cerchio di raggio $R = 1$ m, posta su un piano verticale. Nel punto in cui tale guida si raccorda al piano orizzontale, è posto un altro punto materiale di massa $m_2 = 2m_1$. Il piano orizzontale è scabro e il coefficiente d'attrito dinamico fra punti materiali e piano è $\mu = 0.4$. Quando m_1 arriva in O, urta (con velocità orizzontale) la massa m_2.

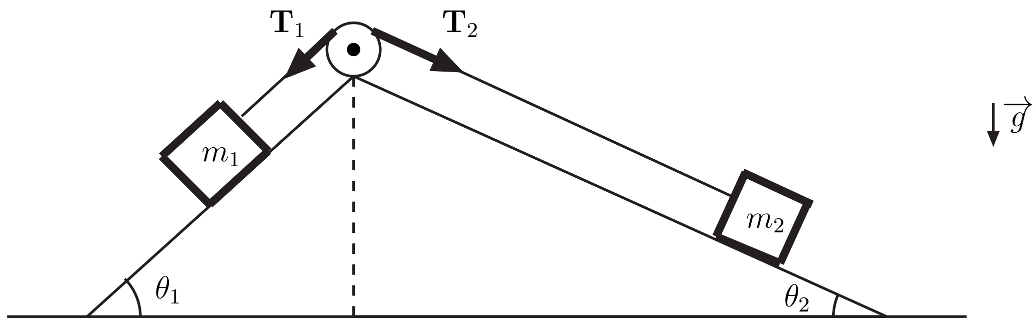


1. Supponendo che l'urto fra m_1 e m_2 sia completamente anelastico, calcolare lo spazio di frenata del sistema costituito dai due punti.
2. Se l'urto è completamente elastico, trovare il moto di m_1 e m_2 dopo l'urto.

****

Esercizio 3 $*$

Due piani inclinati sono disposti come in figura.



Due blocchi di masse $m_1 = 1$ kg e $m_2 = 3$ kg collegati da un filo ideale che passa per la carrucola C si muovono sui due piani inclinati di $\theta_1 = \pi/3$ e $\theta_2 = \pi/6$ rispettivamente, in maniera tale che m_2 scenda e m_1 salga. La carrucola, costituita da un disco di raggio $R = 40$ cm e massa $M = 500$ g è tale che fra filo e carrucola ci sia attrito sufficiente a far sì che il filo non strisci rispetto alla carrucola.

1. Determinare il modulo a dell'accelerazione dei due blocchi.
2. Dati θ_1 e θ_2, quale deve essere il rapporto m_2/m_1 affinché il moto avvenga con velocità costante?
3. Se la carrucola è arrugginita e quindi nel suo moto sperimenta un momento frenante costante $\tau = 1$ Nm, come cambia a?

NB. Si mette in evidenza il fatto che, come indicato in figura, le due tensioni T_1 e T_2 sono diverse fra loro.

Esercizio 4 $*$

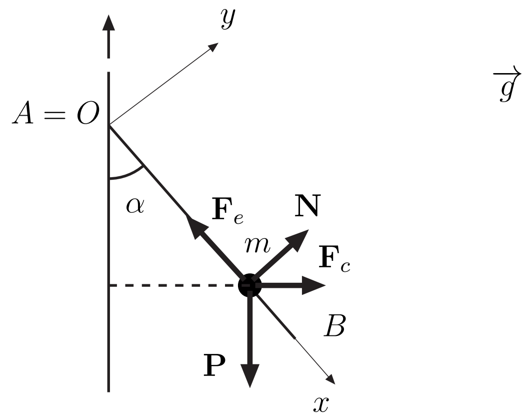
Tre moli di gas perfetto biatomico sono in equilibrio nello stato A. Tramite un'espansione isobara reversibile il gas si porta nello stato B e poi con una adiabatica irreversibile il gas si porta nello stato C con una variazione di energia interna $\Delta U_{BC} = -3000$ J. Infine, con una isoterma reversibile, nella quale scambia con l'ambiente una quantità di calore $Q_{CA} = -3600$ J, il gas torna nello stato A.

Sapendo che $V_A/V_C = 0.2$, determinare:

1. il diagramma del ciclo nel piano di Clapeyron;
2. il valore di T_C e T_B;
3. il rendimento del ciclo;
4. la variazione di entropia del gas nella trasformazione BC, ΔS_{BC}.

Soluzione esercizio 1

Mettiamoci nel SdR non inerziale, che ruota solidalmente con la guida. Inoltre, prendiamo l'asse x lungo la guida e l'asse delle y perpendicolare a questa. Il punto è individuato dalla sua coordinata x. Il sistema di forze che agisce sul punto è rappresentato in figura.



C'è la forza peso, la reazione vincolare (normale alla guida poiché il vincolo è liscio), la forza centrifuga e la forza di richiamo elastico.

1. Per trovare il punto di equilibrio basta applicare la prima cardinale della statica, scomposta lungo le due direzioni x e y.

   Lungo le x abbiamo:
   $$P\cos\alpha + F_c \sin\alpha = F_e\,, \tag{1}$$
   dove
   $$\begin{aligned} P &= mg\,, &(2)\\ F_c &= m\omega^2 x\sin\alpha\,, &(3)\\ F_e &= k\,x\,. &(4)\end{aligned}$$
   Quindi
   $$x_{eq} = \frac{mg\cos\alpha}{k - m\omega^2\sin^2\alpha} = 0.17\ \text{m}\,. \tag{5}$$

2. La reazione vincolare è N, che possiamo ricavare dalla componente y della cardinale
   $$\begin{aligned} N &= mg\sin\alpha - m\omega^2 x_{eq}\sin\alpha\cos\alpha\,, &(6)\\ &= mg\sin\alpha - m\omega^2\frac{mg\cos\alpha}{k - m\omega^2\sin^2\alpha}\sin\alpha\cos\alpha\,, &(7)\\ &= 0.09\ \text{N}\,. &(8)\end{aligned}$$

3. L'equazione del moto nel SdR non inerziale è
   $$m\ddot{x} = mg\cos\alpha + m\omega^2 x\sin^2\alpha - kx = mg\cos\alpha - (k - m\omega^2\sin^2\alpha)x \tag{9}$$
   Se consideriamo la variabile
   $$\xi = x - x_{eq} = x - \frac{mg\cos\alpha}{k - m\omega^2\sin^2\alpha}\,, \tag{10}$$

abbiamo $\dot{\xi} = \dot{x}$, $\ddot{\xi} = \ddot{x}$ e quindi l'equazione del moto diventa:

$$\ddot{\xi} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha \right) \xi = 0 \, . \tag{11}$$

Il periodo sarà dato da

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha\right)}} = 0.9 \text{ s} \, . \tag{12}$$

Soluzione esercizio 2

Siccome l'arco di circonferenza è liscio, per trovare la velocità di m_1 in O si può utilizzare la conservazione dell'energia meccanica:

$$m_1 g R = \frac{1}{2} m_1 v_O^2 \, , \tag{13}$$

cioè

$$v_O = \sqrt{2gR} = 4.43 \text{ m} \quad \text{s}^{-1} \, . \tag{14}$$

La velocità così trovata è diretta lungo le x.

1. Nell'istante dell'urto non ci sono forze esterne impulsive che agiscono sul sistema $m_1 + m_2$ lungo le x. Quindi si conserva la componente x della quantità di moto

   $$m_1 v_O = (m_1 + m_2) v \, , \tag{15}$$

   da cui

   $$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_O = \frac{1}{3} v_O = 1.48 \text{ m} \quad \text{s}^{-1} \, . \tag{16}$$

   Dal momento dell'urto, per trovare lo spazio di frenata Δx si può utilizzare il teorema delle forze vive

   $$L_{if} = T_f - T_i = 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 \, , \tag{17}$$

   dove abbiamo anche

   $$L_{if} = -\mu (m_1 + m_2) g \Delta x \, . \tag{18}$$

   Quindi

   $$\Delta x = \frac{v^2}{2\mu g} = 0.28 \text{ m} \, . \tag{19}$$

2. Se l'urto è elastico, la velocità di m_1 subito dopo l'urto è un'altra incognita del problema. Si conserva l'energia cinetica, quindi abbiamo anche un'equazione in più.

   $$m_1 v_O = m_1 v_1 + m_2 v_2 \, , \tag{20}$$
   $$m_1 v_O^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \, . \tag{21}$$

Possiamo riscrivere il sistema come segue

$$\begin{aligned} m_1(v_O - v_1) &= m_2 v_2\,, && (22) \\ m_1(v_O^2 - v_1^2) &= m_1(v_O + v_1)(v_O - v_1) = m_2 v_2^2\,. && (23) \end{aligned}$$

Risolvendo si ha

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{2m_1}{m_1+m_2} v_O = \frac{2}{3} v_O = 2.95 \text{ m} \quad \text{s}^{-1}\,, && (24) \\ v_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2} v_O = -\frac{1}{3} v_O = -1.48 \text{ m} \quad \text{s}^{-1}\,, && (25) \end{aligned}$$

cioè il punto materiale di massa m_1 rimbalza su m_2 e torna indietro risalendo parzialmente la guida fino ad un'altezza h tale che

$$h = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{1}{9} R = 0.112 \text{ m}\,. \tag{26}$$

Poi riscende sempre lungo la guida e in O ha di nuovo velocità

$$v_1 = \frac{1}{3} v_O = 1.48 \text{ m} \quad \text{s}^{-1}\,, \tag{27}$$

diretta nel verso positivo delle x. Entra nel tratto scabro e si arresta dopo

$$\Delta x_1 = \frac{v_1^2}{2\mu g} = 0.28 \text{ m}\,. \tag{28}$$

il punto di massa m_2 acquista, dopo l'urto, una velocità v_2 nel verso delle x positive. Entra nel tratto scabro e poi si arresta dopo

$$\Delta x_2 = \frac{v_2^2}{2\mu g} = 1.11 \text{ m}\,. \tag{29}$$

Soluzione esercizio 3

1. Indichiamo con a l'accelerazione comune del blocchetto m_2 e m_1. Per il moto del blocchetto m_2 prendiamo un sistema di riferimento lungo il piano inclinato. Allora

$$m_2 a = m_2 g \sin\theta_2 - T_2\,, \tag{30}$$

dove T_2 è la tensione della corda nel tratto da m_2 alla carrucola. La stessa cosa per m_1:

$$m_1 a = -m_1 g \sin\theta_1 + T_1\,, \tag{31}$$

dove T_1 è la tensione della corda nel tratto da m_1 alla carrucola. Il movimento della carrucola è descritto dalla seconda cardinale:

$$I\ddot{\theta} = (T_2 - T_1) R\,, \tag{32}$$

dove

$$I = \frac{MR^2}{2}\,, \tag{33}$$
$$\ddot{\theta} = \frac{a}{R}\,. \tag{34}$$

Risolvendo il sistema si ottiene

$$a = g\,\frac{m_2 \sin\theta_2 - m_1 \sin\theta_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} = g\,\frac{m_2 \sin\theta_2 - m_1 \sin\theta_1}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} = 1.46 \text{ m} \quad \text{s}^{-2}\,. \tag{35}$$

2. Per avere velocità costante, il moto deve avere accelerazione nulla. Quindi

$$a = 0 \quad \Longrightarrow \quad m_2 g \sin\theta_2 = m_1 g \sin\theta_1\,, \tag{36}$$

ovvero

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\,. \tag{37}$$

3. Se τ è il momento frenante agente sulla carrucola, allora la seconda cardinale sarà

$$I\ddot{\theta} = (T_2 - T_1)R - \tau\,, \tag{38}$$

e quindi

$$a = \frac{g(m_2 \sin\theta_2 - m_1 \sin\theta_1) - \frac{\tau}{R}}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} = 0.88 \text{ m} \quad \text{s}^{-2}\,. \tag{39}$$

cioè l'accelerazione diminuisce rispetto al caso senza attrito.

Soluzione esercizio 4

1. Siccome la trasformazione CA è un'isoterma, di cui conosciamo il calore scambiato, possiamo trovare T_C.

$$Q_{CA} = L_{CA} = nRT_C \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) = -3600 \text{ J}\,, \tag{40}$$

da cui

$$T_C = T_A = \frac{Q_{CA}}{nR\ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right)} = 89.7 \text{ K}\,. \tag{41}$$

Per trovare T_B, invece, sfruttiamo la trasformazione BC (adiabatica) per la quale abbiamo

$$\Delta U_{BC} = n\tilde{c}_V(T_C - T_B) = -3000 \text{ J}\,, \tag{42}$$

da cui

$$T_B = T_C - \frac{\Delta U_{BC}}{n\tilde{c}_V} = 137.8 \text{ K}\,. \tag{43}$$

2. Per trovare il rendimento del ciclo, abbiamo

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{ass}}\,, \tag{44}$$

dove

$$\begin{aligned} Q_{ced} &= Q_{CA} = -3600 \text{ J}\,, && (45)\\ Q_{ass} &= Q_{AB} = n\tilde{c}_p(T_B - T_A) = 4200.0 \text{ J}\,. && (46) \end{aligned}$$

Allora

$$\eta = 0.143\,. \tag{47}$$

Alternativamente si può utilizzare la

$$\eta = \frac{L_{tot}}{Q_{ass}}\,, \tag{48}$$

dove $L_{tot} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA}$ con

$$\begin{aligned} L_{AB} &= p_A \int dV = p_A(V_B - V_A) = nR(T_B - T_A) = 1200 \text{ J}\,, && (49)\\ L_{BC} &= -\Delta U_{BC} = -n\tilde{c}_V(T_C - T_B) = 3000 \text{ J}\,, && (50)\\ L_{CA} &= Q_{CA} = nRT_C \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) = -3600 \text{ J}\,. && (51) \end{aligned}$$

3. Per trovare la differenza di entropia ΔS_{BC} non possiamo integrare l'integrale di Clausius lungo la trasformazione irreversibile. Dobbiamo trovare una trasformazione (o serie di trasformazioni) reversibile che colleghi B a C e sulle quali si possa calcolare l'entropia. Siccome

$$\Delta S = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = 0\,, \tag{52}$$

si ha

$$\Delta S_{BC} = -\Delta S_{AB} - \Delta S_{CA}\,. \tag{53}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \Delta S_{AB} &= \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = n\tilde{c}_p \int_A^B \frac{dT}{T} = n\tilde{c}_p \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)\,, && (54)\\ \Delta S_{CA} &= \int_C^A \frac{\delta Q}{T} = nR \int_C^A \frac{dV}{V} = nR \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right)\,. && (55) \end{aligned}$$

Quindi

$$\Delta S_{BC} = n\tilde{c}_p \ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right) + nR \ln\left(\frac{V_C}{V_A}\right) = 2.66 \text{ J/K}\,. \tag{56}$$

Allo stesso modo, possiamo direttamente utilizzare la forma funzionale dell'entropia del gas perfetto e calcolare direttamente $S(C) - S(B)$:

$$\Delta S_{BC} = n\tilde{c}_V \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) + nR \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right)\,, \tag{57}$$

$$= n\tilde{c}_V \ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right) + nR\left[\ln\left(\frac{V_C}{V_A}\right) + \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)\right] , \tag{58}$$

$$= n\tilde{c}_V \ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right) + nR\left[\ln\left(\frac{V_C}{V_A}\right) + \ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right)\right] , \tag{59}$$

$$= n\tilde{c}_p \ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right) + nR\ln\left(\frac{V_C}{V_A}\right) . \tag{60}$$