Esame 29 Settembre 2017

Roberto Bonciani e Paolo Dore

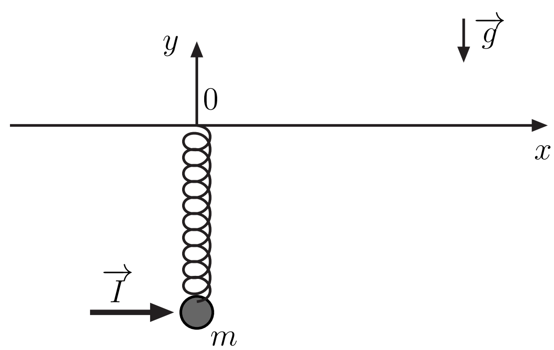
Corso di Fisica Generale 1
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2016-2017

Esame - Fisica Generale I
29 Settembre 2017

R. Bonciani, P. Dore

Esercizio 1

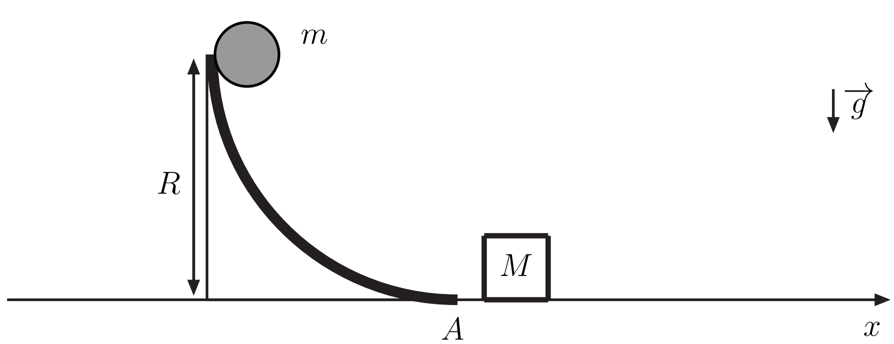
Un punto materiale di massa $m = 500$ g, libero di muoversi in un piano verticale, è collegato al punto fisso O mediante una molla ideale di costante elastica $k = 3$ N/m e lunghezza di riposo trascurabile.



1. Ricavare la posizione di equilibrio.
2. A $t = 0$ la pallina si trova in posizione di equilibrio e riceve un impulso $\vec{I}$ orizzontale di modulo pari a $I = 2.5$ N s. Ricavare l'equazione del moto.

Esercizio 2

Un disco di raggio $r = 20$ cm e massa $m = 1.0$ kg è vincolato a rotolare senza strisciare su una guida a forma di quarto di circonferenza di raggio $R = 80$ cm, disposta in un piano verticale (vedi figura). La superficie di contatto fra disco e guida è scabra (rappresentata in figura dalla linea in grassetto). La guida si raccorda in maniera continua e derivabile al piano orizzontale determinato dall'asse x in figura. Dal punto A in poi, il vincolo è liscio. A distanza r da A è posto un blocco di massa $M = 2.0$ kg, vincolato a muoversi sul piano orizzontale senza attrito e a non distaccarsene mai.



Al tempo $t = 0$ il disco viene lasciato da fermo nella posizione in figura, cioè in contatto con la guida e col centro di massa ad altezza R dal suolo. Rotolando (di rotolamento puro) arriva in A ed urta il blocco di massa M in maniera completamente elastica. Fra disco e blocco non c'è attrito. Durante l'urto il vincolo di rotolamento puro è preservato.

1. Con che velocità del centro di massa il disco arriva nella posizione dell'urto?
2. Qual'è la velocità del blocco dopo l'urto?
3. Qual'è l'altezza massima a cui il centro di massa del disco arriva risalendo la guida dopo l'urto?

Esercizio 3

Due moli di gas perfetto monoatomico lavorano come macchina termica compiendo cicli di Carnot fra due sorgenti di temperatura $T_c = 400\,^\circ$ K e $T_f = 200\,^\circ$ K. Il lavoro prodotto viene utilizzato per mettere in rotazione una turbina, che ha la forma di un cilindro omogeneo di massa $M = 40$ kg e raggio $r = 80$ cm, che gira intorno al proprio asse. Dopo $N_c = 3$ cicli esatti, la turbina ha acquistato una frequenza di rotazione di 5 giri/s. Trovare il rapporto V_B/V_A, dove V_A e V_B sono i volumi del gas negli stati A e B corrispondenti allo stato iniziale e finale della trasformazione isoterma che il gas subisce quando è a contatto con la sorgente calda.

Soluzione esercizio 1

1. La posizione di equilibrio del punto soggetto alle forze in gioco è data da

$$\begin{aligned} 0 &= -ky - mg\,, \quad (1)\\ 0 &= -kx\,, \quad (2) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} x_{eq} &= 0\,, \quad (3)\\ y_{eq} &= -\frac{mg}{k} = -1.635\ \mathrm{m}\,. \quad (4) \end{aligned}$$

2. Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx\,, \quad (5)\\ m\ddot{y} &= -ky - mg = -k(y - y_{eq})\,, \quad (6) \end{aligned}$$

con soluzione

$$\begin{aligned} x(t) &= A_x \cos(\omega t + \phi_x)\,, \quad (7)\\ y(t) &= y_{eq} + A_y \cos(\omega t + \phi_y)\,, \quad (8) \end{aligned}$$

dove $\omega = \sqrt{k/m}$.

Per trovare le condizioni iniziali sulla velocità, basta utilizzare il fatto che se il punto riceve l'impulso $\mathbf{I}$, partirà con una velocità pari a

$$\mathbf{v}(0) = \frac{\mathbf{I}}{m}\,, \quad (9)$$

ovvero con una velocità diretta lungo le x con verso positivo e modulo pari a

$$v(0) = \frac{I}{m} = 5\ \mathrm{m/s}\,. \quad (10)$$

Imponendo le condizioni iniziali sul moto si ottiene:

$$\begin{aligned} x(0) &= A_x \cos\phi_x = 0\,, \quad (11)\\ y(0) &= y_{eq} + A_y \cos\phi_y = y_{eq}\,, \quad (12)\\ \dot{x}(0) &= -A_x \omega \sin\phi_x = v_0\,, \quad (13)\\ \dot{y}(0) &= -A_y \omega \sin\phi_y = 0\,, \quad (14) \end{aligned}$$

sistema che ha come soluzione

$$\begin{aligned} \phi_x &= \frac{\pi}{2}\,, \quad (15)\\ A_x &= -\frac{v_0}{\omega}\,, \quad (16)\\ \phi_y &= qualsiasi\,, \quad (17) \end{aligned}$$

$$A_y = 0\,. \tag{18}$$

Il moto è quindi dato da

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)\,, \tag{19}$$

$$y(t) = y_{eq}\,. \tag{20}$$

Cioè il punto si muove con moto armonico solo nella direzione x ad una quota pari alla quota di equilibrio.

Soluzione esercizio 2

1. Il vincolo di ritolamento puro non dissipa energia (non si compie lavoro) per cui possiamo determinare la velocità con cui il centro di massa del disco arriva nella posizione A utilizzando la conservazione dell'energia.

   A $t = 0$ il disco è fermo ad altezza R da terra, quindi l'energia meccanica è costituita dalla sola energia potenziale. Prendendo lo zero dell'energia potenziale alla quota $y = r$ si ha

   $$V = mg(R - r)\,. \tag{21}$$

   Quando il disco raggiunge A, la sua energia meccanica è data dall'energia cinetica

   $$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 = \frac{3}{4}mv_c^2\,, \tag{22}$$

   dove abbiamo utilizzato il fatto che

   $$I_c = \frac{mr^2}{2} \tag{23}$$

   e

   $$\omega = \frac{v_c}{r}\,, \tag{24}$$

   che viene dal rotolamento puro.

   Uguagliando l'energia meccanica iniziale a quella finale si ottiene

   $$v_c = \sqrt{\frac{4}{3}g(R - r)} = 2.80 \text{ m s}^{-1}\,. \tag{25}$$

   Inoltre $\mathbf{v}_c$ è diretta lungo l'asse delle x con verso positivo.

2. Se indichiamo con $\mathbf{v}'_c$ la velocità del centro di massa del disco subito dopo l'urto e con $\mathbf{V}$ la velocità del blocco sempre subito dopo l'urto, abbiamo che entrambe saranno dirette lungo l'asse delle x.

   Siccome l'urto è elastico, l'energia cinetica nell'urto si conserva. Possiamo quindi scrivere che

   $$\frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 = \frac{1}{2}mv_c'^2 + \frac{1}{2}I_c\omega'^2 + \frac{1}{2}MV^2\,, \tag{26}$$

dove

$$\omega' = \frac{v'_c}{r}\,, \tag{27}$$

ovvero

$$\frac{3}{4}mv_c^2 = \frac{3}{4}mv_c'^2 + \frac{1}{2}MV^2\,. \tag{28}$$

Per determinare le due velocità v'_c e V abbiamo bisogno di un'altra equazione. Siccome sussiste il vincolo di rotolamento puro fra disco e guida, la quantità di moto NON si conserva nell'urto. Dobbiamo allora analizzare le cardinali nel limite impulsivo.

Durante l'urto, il disco comunica un impulso $\mathbf{J}$ al blocco il quale reagisce con un impulso $-\mathbf{J}$ sul disco. In conseguenza di ciò, il blocco si mette in moto con velocità $\mathbf{V} = V\hat{\imath}$. Allora

$$J = MV\,. \tag{29}$$

Applichiamo adesso la seconda cardinale impulsiva al disco, scegliendo come centro di riduzione il punto del disco coincidente con A, che è fermo. In questo modo poniamo direttamente a zero il momento delle forze impulsive che agiscono per mantenere il vicnolo di rotolamento puro e che agiscono per forza di cose sul quel punto. Prendendo come verso positivo di rotazione quello orario (per il quale sia v_c che ω sono positivi), si ha

$$-Jr = \Delta L_A = I_A\omega' - I_A\omega = \frac{3}{2}mr(v'_c - v_c)\,. \tag{30}$$

Quindi, la seconda equazione che cercavamo è la

$$-MV = \frac{3}{2}m(v'_c - v_c)\,, \tag{31}$$

da cui

$$V = \frac{3}{2}\frac{m}{M}(v_c - v'_c)\,, \tag{32}$$

che sostituita nella (28) dà un'equazione di secondo grado per determinare v'_c:

$$\left(\frac{9}{2}\frac{m^2}{M} + 3m\right)v_c^2 - \frac{9m^2v_c}{M}v'_c + \left(\frac{9}{2}\frac{m^2}{M} - 3m\right)v_c^2 = 0\,. \tag{33}$$

Le due soluzioni sono

$$v'_c = v_c\,, \tag{34}$$

$$v'_c = \frac{3m - 2M}{3m + 2M}v_c\,. \tag{35}$$

La prima soluzione non è accettabile in quanto il disco dovrebbe continare con la stessa velocità, quindi l'urto non avrebbe luogo. Scegliamo la seconda soluzione si ha:

$$v'_c = \frac{3m - 2M}{3m + 2M}v_c = -\frac{1}{7}v_c = -1.06\ \mathrm{m\ s^{-1}}\,, \tag{36}$$

$$V = \frac{3}{2}\frac{m}{M}(v_c - v'_c) = \frac{6m}{3m + 2M}v_c = \frac{6}{7}v_c = 2.59\ \mathrm{m\ s^{-1}}\,. \tag{37}$$

Con questi valori delle masse, il disco arriva sul blocco con una certa velocità v_c e, in seguito all'urto, il blocco parte con velocità positiva, mentre il disco rimbalza e torna indietro risalendo per un tratto la guida.

3. L'altezza h a cui il centro di massa del disco risale sarà tale che

$$mgh = \frac{1}{2}mv_c'^2 + \frac{1}{2}I_c\omega'^2 + mgr = \frac{3}{4}mv_c'^2 + mgr\,, \tag{38}$$

da cui

$$h = \frac{3}{4}\frac{v_c'^2}{g} + r = 29 \text{ cm}\,. \tag{39}$$

Soluzione esercizio 3

Il lavoro fatto per portare alla velocità angolare data la turbina si può calcolare col teorema delle forze vive. Si ha

$$L_0 = T_f - T_i = T_f = \frac{1}{2}I\omega^2\,. \tag{40}$$

Il momento d'inerzia della turbina rispetto al proprio asse è

$$I = \frac{1}{2}Mr^2 = 12.8 \text{ kg m}^2\,. \tag{41}$$

Se la frequenza finale della turbina è di $\nu = 5$ giri/s, si ha

$$\omega = 2\pi\nu = 31.4 \text{ s}^{-1}\,. \tag{42}$$

Quindi

$$L_0 = 6316.55 \text{ J}\,. \tag{43}$$

Se un ciclo di Carnot produce il lavoro L, dopo N_c cicli verrà prodotto il lavoro totale

$$L_{tot} = N_c L \equiv L_0\,. \tag{44}$$

Il lavoro di un ciclo sarà dato dalla relazione

$$L = \eta Q_c = \left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) Q_c\,, \tag{45}$$

dove Q_c è il calore assorbito dal gas durante la trasformazione isoterma a $T = T_c$

$$Q_c = nRT_c \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \tag{46}$$

e quindi

$$L_0 = N_c\left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) nRT_c \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)\,. \tag{47}$$

Il rapporto fra i volumi è dato quindi da

$$\frac{V_B}{V_A} = \exp\left\{\frac{L_0}{\left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) nN_cRT_c}\right\} = 1.88\,. \tag{48}$$