Esame 30 Giugno 2020

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2019-2020

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
30 Giugno 2020 – Gruppo A

Esercizio 1 (10 pt)
Calcolare, con tecniche di analisi complessa, il seguente integrale

$$PV \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}\, dx\,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (5 pt)
Dire per quale valore di α la seguente funzione può essere considerata la parte reale di una funzione analitica:

$$u(x,y) = \frac{x^\alpha}{x^2+y^2}\,. \tag{2}$$

Esercizio 3 (6 pt)
Data la matrice $N \times N$, $\mathbf{A}$ tale che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ (la matrice identità) mostrare che per ogni x reale vale la relazione

$$e^{ix\mathbf{A}} \;=\; \cos x\,\mathbf{I} + i\sin x\,\mathbf{A}\,. \tag{3}$$

Esercizio 4 (9 pt)
Data l'equazioni sulla retta

$$\partial_t f(x,t) = 2t\,\partial^2_{xx} f(x,t) + \delta(t^2-6t+5)\,\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,, \tag{4}$$

con

$$f(x,0) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \tag{5}$$

trovare la soluzione $f(x,t)$.

Soluzione Es. 1

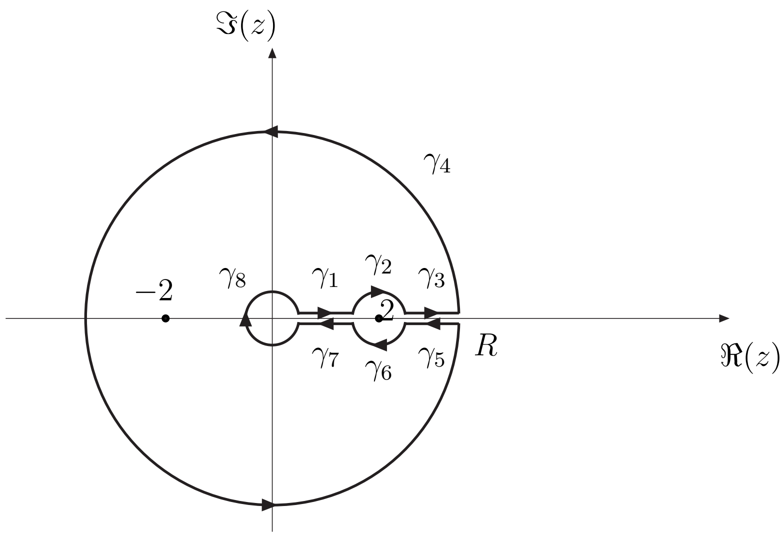
Per calcolare l'integrale consideriamo la seguente funzione

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2 - 4}\,. \tag{6}$$

$f(z)$ ha un taglio dovuto alla radice e due poli semplici in

$$z = \pm 2\,. \tag{7}$$

Il polo $z = 2$ giace sul cammino d'integrazione. Poniamo il taglio della radice sul cammino d'integrazione e consideriamo il cammino in figura.



Facendo l'integrale su $\Gamma = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5+\gamma_6+\gamma_7+\gamma_8$, si può applicare il teorema dei residui:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,(f,-2) = 2\pi i \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\,. \tag{8}$$

Per l'integrale su Γ si ha:

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty, r\to 0}\int_{\gamma_1+\gamma_3} f(z) &= PV\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}dx\,, & (9)\\
\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_2} f(z) &= -i\pi\mathrm{Res}(f,2) = -i\pi\frac{\sqrt{2}}{4}\,, & (10)\\
\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_4} f(z) &= \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{R}e^{i\frac{\theta}{2}}}{R^2e^{i2\theta}-4}\,iRe^{i\theta}\,d\theta = 0\,, & (11)\\
\lim_{R\to\infty, r\to 0}\int_{\gamma_5+\gamma_6} f(z) &= PV\int_\infty^0\left(-\frac{\sqrt{x}}{x^2-4}\right)dx = PV\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}dx\,, & (12)\\
\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_6} f(z) &= -i\pi\mathrm{Res}(\tilde{f},2) = i\pi\frac{\sqrt{2}}{4}\,, & (13)
\end{aligned}$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_8} f(z) \quad = \quad \lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}}{r^2e^{i2\theta}-4}\, ire^{i\theta}\,d\theta = 0\,. \tag{14}$$

La funzione $\tilde{f}$ in Eq. (13) è la $f(z)$ valutata sul taglio da sotto e quindi è

$$\tilde{f}(x) = -\frac{\sqrt{x}}{x^2-4}\,. \tag{15}$$

In totale, quindi, i contributi in $z=2$ si annullano e otteniamo

$$2\,PV\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\,, \tag{16}$$

ovvero

$$PV\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\,. \tag{17}$$

Soluzione Es. 2

Per essere la parte reale di una funzione analitica, la $u(x,y)$ deve essere armonica. Imponiamo dunque che $\Delta u(x,y)=0$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}u(x,y) &= \frac{x^{\alpha-1}\left[(\alpha-2)x^2+\alpha y^2\right]}{(x^2+y^2)^2}\,, && (18)\\
\frac{d^2}{dx^2}u(x,y) &= \frac{(x^{(\alpha-2)}((\alpha-3)(\alpha-2)x^4+2((\alpha-3)\alpha-1)x^2y^2+(\alpha-1)\alpha y^4))}{(x^2+y^2)^3}\,, && (19)\\
\frac{d}{dy}u(x,y) &= -\frac{2x^\alpha y}{(x^2+y^2)^2}\,, && (20)\\
\frac{d^2}{dy^2}u(x,y) &= -\frac{2x^\alpha(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}\,. && (21)
\end{aligned}$$

Quindi

$$\Delta u(x,y) = \frac{(\alpha-1)x^{\alpha-2}\left[(\alpha-4)x^2+\alpha y^2\right]}{(x^2+y^2)^2} = 0\,, \tag{22}$$

se $\alpha = 1$.

Soluzione Es. 3

Separando le potenze pari e quelle dispari abbiamo

$$e^{ix\mathbf{A}} = \sum_{n=0}\frac{i^nx^n}{n!}\mathbf{A}^n = \sum_{p=0}\frac{i^{2p}x^{2p}}{(2p)!}\mathbf{A}^{2p} + \sum_{p=0}\frac{i^{2p+1}x^{2p+1}}{(2p+1)!}\mathbf{A}^{2p+1} \tag{23}$$

usando $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ si ottiene

$$\mathbf{A}^{2p} = \mathbf{I}\ \ ,\ \ \mathbf{A}^{2p+1} = \mathbf{A} \tag{24}$$

da cui

$$e^{ix\mathbf{A}} = \sum_{p=0}\frac{i^{2p}x^{2p}}{(2p)!}\mathbf{I} + \sum_{p=0}\frac{i^{2p+1}x^{2p+1}}{(2p+1)!}\mathbf{A} \tag{25}$$

poiché $i^{2p} = (-1)^p$ e $i^{2p+1} = i(-1)^p$

$$e^{ix\mathbf{A}} = \Big(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...\Big)\mathbf{I} + i\Big(x - \frac{x^3}{3!} + ...\Big)\mathbf{A} = \cos x\,\mathbf{I} + i\sin x\,\mathbf{A} \tag{26}$$

Soluzione Es. 4

Notiamo che

$$\delta(t^2 - 6t + 5) = \frac{1}{4}\delta(t-1) + \frac{1}{4}\delta(t-5)\,. \tag{27}$$

Occupiamoci della soluzione per $t < 1$: passando in trasformata di Fourier abbiamo

$$\frac{d\hat{f}(k,t)}{dt} = -2tk^2\hat{f}(k,t) \quad\rightarrow\quad \hat{f}(k,t) = e^{-t^2k^2}\hat{f}(k,0) \tag{28}$$

ritornando a $f(x,t)$ abbiamo gli stessi calcoli dell'equazione del calore con l'unica differenza di avere t^2 invece di t quindi

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4t^2\pi}}\int e^{-\frac{(x-x')^2}{4t^2}} f(x',0)\,dx' \tag{29}$$

usando il teorema di convoluzione e le proprietá delle trasformate di Fourier delle gaussiane si ha

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{(4t^2+2)\pi}}e^{-\frac{x^2}{(4t^2+2)}}\,. \tag{30}$$

Per $t > 1$ dobbiamo aggiungere anche

$$f_1(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{4(t^2-t'^2)\pi}}\int e^{-\frac{(x-x')^2}{4(t^2-t'^2)}}\delta(t'-1)\frac{e^{-\frac{x'^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt'\,dx'\,, \tag{31}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{(4(t^2-1)+2)\pi}}e^{-\frac{x^2}{4(t^2-1)+2}} \tag{32}$$

in modo analogo per $t > 5$ si deve aggiungere, oltre a $f_1(x,t)$, anche

$$f_2(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{4(t^2-t'^2)\pi}}\int e^{-\frac{(x-x')^2}{4(t^2-t'^2)}}\delta(t'-5)\frac{e^{-\frac{x'^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt'\,dx'\,, \tag{33}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{(4(t^2-5^5)+2)\pi}}e^{-\frac{x^2}{4(t^2-5^2)+2}}\,. \tag{34}$$