Esame 30 Giugno 2020

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2019-2020

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
30 Giugno 2020 – Gruppo B

Esercizio 1 (10 pt)
Calcolare, con tecniche di analisi complessa, il seguente integrale

$$PV \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 16}\, dx\,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (5 pt)
Dire per quale valore di α la seguente funzione può essere considerata la parte reale di una funzione analitica:

$$u(x, y) = \cosh(x)\cos(\alpha y)\,. \tag{2}$$

Esercizio 3 (6 pt)
Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \tag{3}$$

1. dire per quali valori di c e s è unitaria
2. se esistono valori reali di c e s tali che è contemporaneamente unitaria e autoggiunta, se si quali sono gli autovalori.

Esercizio 4 (9 pt)
Data l'equazioni sulla retta

$$\partial_t f(x, t) = \partial^2_{xx} f(, t) - f(x, t) - \partial_x f(x, t)\,, \tag{4}$$

con

$$f(x, 0) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,, \tag{5}$$

trovare la soluzione $f(x, t)$ e fare un disegno qualitativo a due tempi t_1 e $t_2 > t_1$.

Soluzione Es. 1

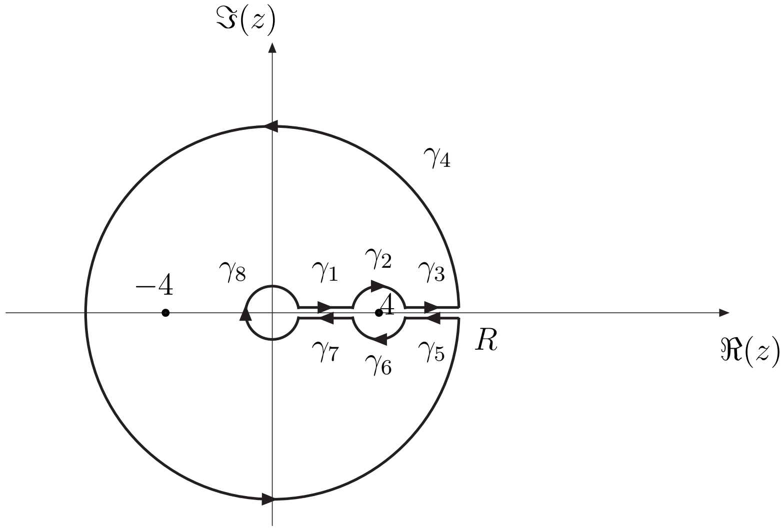
Per calcolare l'integrale consideriamo la seguente funzione

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2 - 16}\,. \tag{6}$$

$f(z)$ ha un taglio dovuto alla radice e due poli semplici in

$$z = \pm 4\,. \tag{7}$$

Il polo $z = 4$ giace sul cammino d'integrazione. Poniamo il taglio della radice sul cammino d'integrazione e consideriamo il cammino in figura.



Facendo l'integrale su $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6 + \gamma_7 + \gamma_8$, si può applicare il teorema dei residui:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,(f, -4) = 2\pi i\left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{1}{2}\pi\,. \tag{8}$$

Per l'integrale su Γ si ha:

$$\lim_{R\to\infty, r\to 0}\int_{\gamma_1+\gamma_3} f(z) = PV\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-16}dx\,, \tag{9}$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_2} f(z) = -i\pi\mathrm{Res}(f, 4) = -i\pi\frac{1}{4}\,, \tag{10}$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_4} f(z) = \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{R}e^{i\frac{\theta}{2}}}{R^2e^{i2\theta}-16}\,iRe^{i\theta}\,d\theta = 0\,, \tag{11}$$

$$\lim_{R\to\infty, r\to 0}\int_{\gamma_5+\gamma_6} f(z) = PV\int_\infty^0 \left(-\frac{\sqrt{x}}{x^2-16}\right)dx = PV\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-16}dx\,, \tag{12}$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_6} f(z) = -i\pi\mathrm{Res}(\tilde{f}, 4) = i\pi\frac{1}{4}\,, \tag{13}$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_8} f(z) \;=\; \lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}}{r^2e^{i2\theta}-16}\, ire^{i\theta}\, d\theta = 0\,. \tag{14}$$

La funzione $\tilde{f}$ in Eq. (13) è la $f(z)$ valutata sul taglio da sotto e quindi è

$$\tilde{f}(x) = -\frac{\sqrt{x}}{x^2-16}\,. \tag{15}$$

In totale, quindi, i contributi in $z = 4$ si annullano e otteniamo

$$2\,PV\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-16}dx = \frac{\pi}{2}\,, \tag{16}$$

ovvero

$$PV\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-16}dx = \frac{\pi}{4}\,. \tag{17}$$

Soluzione Es. 2

Per essere la parte reale di una funzione analitica, la $u(x, y)$ deve essere armonica. Imponiamo dunque che $\Delta u(x, y) = 0$. Abbiamo

$$\frac{d}{dx}u(x,y) \;=\; \sinh(x)\cos(\alpha y)\,, \tag{18}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x,y) \;=\; \cosh(x)\cos(\alpha y)\,, \tag{19}$$

$$\frac{d}{dy}u(x,y) \;=\; -\alpha\cosh(x)\sin(\alpha y)\,, \tag{20}$$

$$\frac{d^2}{dy^2}u(x,y) \;=\; -\alpha^2\cosh(x)\cos(\alpha y)\,. \tag{21}$$

Quindi

$$\Delta u(x,y) = -(\alpha^2-1)\,\cosh(x)\cos(\alpha y) = 0\,, \tag{22}$$

se $\alpha = \pm 1$.

Soluzione Es. 3

Affinché $\mathbf{A}$ sia unitaria si deve avere per ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{Ax}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \tag{23}$$

facendo il calcolo si ha

$$c^2 + s^2 = 1\,. \tag{24}$$

Affinché $\mathbf{A}$ sia anche autoaggiunta $s = 0$, quindi abbiamo solo due possibilitá $c = 1$ con autovalori 1 e $c = -1$ con autovalori -1.

Soluzione Es. 4

Passando in trasformata di Fourier abbiamo

$$\frac{d\hat{f}(k,t)}{dt} = (-k^2 - 1 - ik)\hat{f}(k,t) \quad \rightarrow \quad \hat{f}(k,t) = e^{-t}\left(e^{-ikt}e^{-tk^2}\hat{f}(k,0)\right) \tag{25}$$

ritornando a $f(x,t)$ il calcolo si puó fare facilmente usando le proprietá delle trasformate di Fourier (la moltiplicazione per e^{-iak} nella trasformata di Fourier corrisponde ad spostamento da x ad $x-a$ nella funzione) il problema si riconduce al caso dell'equazione del calore in cui al posto di x si sostituisce $x-t$ abbiamo quindi

$$f(x,t) = e^{-t}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int e^{-\frac{(x-t-x')^2}{4t}}e^{-\frac{x'^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx' = \frac{e^{-t}}{\sqrt{(4t+2)\pi}}e^{-\frac{(x-t)^2}{4t+2}} \ . \tag{26}$$