Esame 3 Maggio 2023

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2021-2022

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
3 Maggio 2023

NOTA: $\boxed{\textbf{GLI ESERCIZI VANNO CONSEGNATI SU 2 FOGLI DISTINTI}}$

$\boxed{\textbf{Es.1 e Es.2 su uno}} \longleftrightarrow \boxed{\textbf{Es.3 e Es.4 sull'altro}}$

SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA. Esempio "D. Hilbert, 23011862."

Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (10 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+4)\sqrt[3]{x}}\, dx\,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (5 pt)
Studiare le singolarità della funzione

$$f(z) = z \sin\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \tag{2}$$

e calcolarne l'integrale su $\gamma = 2e^{i\theta}$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Esercizio 3 (7 pt)
Data la regola ricorsiva

$$x_{n+1} = ax_n + by_n + c\ ,\ \ y_{n+1} = dx_n + ey_n + f\ , \tag{3}$$

1. trovare i valori di a, b, c, d, e ed f reali tali che esistano finiti

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \quad e \quad y^* = \lim_{n\to\infty} y_n \tag{4}$$

   per ogni valore di x_0 e y_0;

2. nel caso esistano, trovare x^* e y^*.

Esercizio 4 (8 pt)
Data l'equazione

$$\partial_t u(x,t) = D\partial^2_{xx} u(x,t) - v\partial_x u(x,t) + \delta(t-2)\sin x \tag{5}$$

con $0 < x \leq 2\pi$ condizione iniziale $u(x,0) = (\cos x)^2$, calcolare $u(x,t)$.

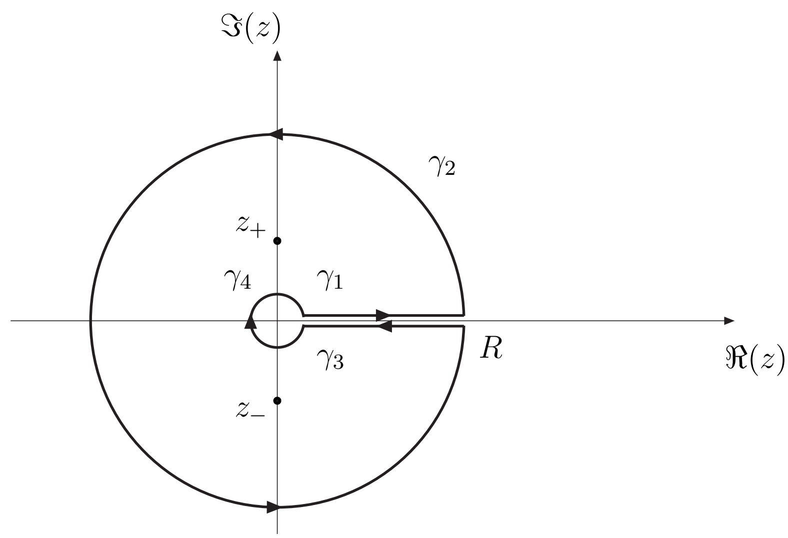
Soluzione Es. 1

Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)z^{\frac{1}{3}}}\,, \tag{6}$$

che è polidroma. Prendiamo il taglio lungo il semiasse reale positivo. Inoltre, la $f(z)$ ha due poli semplici in $z_\pm = \pm 2i$.

Scegliamo il seguente cammino d'intgegrazione[1]:



Facendo l'integrale su $\Gamma = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$, si può applicare il teorema dei residui:

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)\,dz &= 2\pi i\left\{\mathrm{Res}(f,z_+)+\mathrm{Res}(f,z_-)\right\}\,, &(7)\\
&= 2\pi i\left\{-\frac{i}{4\sqrt[3]{2}}e^{-i\frac{\pi}{6}}+\frac{i}{4\sqrt[3]{2}}e^{-i\frac{\pi}{2}}\right\}\,, &(8)\\
&= \frac{\pi}{2\sqrt[3]{2}}\,e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}-e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)\,. &(9)
\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty,r\to 0}\int_{\gamma_1} f(z) &= \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+4)x^{\frac{1}{3}}}dx\,, &(10)\\
\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z) &= \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{1}{(R^2e^{i2\theta}+4)R^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\theta}{3}}}\,iRe^{i\theta}\,d\theta = 0\,, &(11)\\
\lim_{R\to\infty,r\to 0}\int_{\gamma_3} f(z) &= \int_\infty^0\left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{(x^2+4)x^{\frac{1}{3}}}\right)dx = -e^{-\frac{2\pi}{3}i}\int_0^\infty\frac{1}{(x^2+4)x^{\frac{1}{3}}}dx\,, &(12)
\end{aligned}$$

[1] Si potrebbe scegliere anche una semicirconferenza sul semipiano superiore, $Re^{i\theta}$ con $0<\theta<\pi$, chiusa da un segmento sull'asse reale con $-R<x<R$. Infatti nel denominatore di $f(z)$ c'è uno z^2 che rimane sé stesso anche se $z\to ze^{i\pi}$.

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_4} f(z) \quad = \quad -\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(r^2 e^{i2\theta}+4) r^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta}{3}}}\, ire^{i\theta}\, d\theta = 0\,. \tag{13}$$

In totale si trova

$$I\left(1-e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt[3]{2}}\, e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)\,, \tag{14}$$

ovvero

$$I = \frac{\pi}{2\sqrt[3]{2}} \frac{\left(e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)}{\left(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)} = \frac{\pi}{2\sqrt[3]{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\pi}{2\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}\,. \tag{15}$$

Soluzione Es. 2

La funzione $f(z)$ ha, al finito, una singolarità essenziale in $z=1$. Per studiare il punto all'infinito mandiamo z in $1/w$ e studiamo la $f(1/w)$ in $w\to 0$. Si ha

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w}\sin\left(\frac{1+w}{1-w}\right)\,. \tag{16}$$

Quindi, la $f(z)$ ha un polo del primo ordine nel punto all'infinito. È semplice calcolare il residuo della $f(z)$ nel punto all'infinito:

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right)\,, \tag{17}$$

dove

$$\mathrm{Res}\left(-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right) \quad = \quad \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{w^3}\sin\left(\frac{1+w}{1-w}\right), 0\right) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dw^2}\sin\left(\frac{1+w}{1-w}\right)\bigg|_{w=0} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2}{(1-w)^2} + 2\frac{1+w}{(1-w)^3}\right)\cos\left(\frac{1+w}{1-w}\right)\right. \\ &\qquad \left. -\left(\frac{1}{1-w} + \frac{1+w}{(1-w)^2}\right)^2 \sin\left(\frac{1+w}{1-w}\right)\right\}_{w=0}\,, \end{aligned} \tag{19}$$

$$= -2(\cos(1) - \sin(1))\,. \tag{20}$$

Per fare l'integrale ci conviene utilizzare il residuo all'infinito. Si avrà

$$\int_\gamma f(z)\, dz = -2\pi i\,\mathrm{Res}(f,\infty) = 4\pi i(\cos(1) - \sin(1))\,. \tag{21}$$

Soluzione Es. 3

Possiamo scrivere la regola iterativa nella forma

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{n-1} \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

Per avere

$$\lim_{n\to\infty} x_n \ e \ \lim_{n\to\infty} y_n$$

finiti per ogni x_0 e y_0 gli autovalori della matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$$

devono essere in modulo minori di 1, il calcolo e' immediato.
Per trovare x^* e y^* basta ricordare che, se $|x| < 1$ si ha

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}$$

e quindi se la matrice $\mathcal{A}$ ha autovalori minori di uno in modulo, allora

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{A}^j = (\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}$$

si ha quindi

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -d & 1-e \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} .$$

Si arriva allo stesso risultando notando che se il limite esiste si deve necessariamente avere

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

Soluzione Es. 4

Sviluppando $u(x,t)$ in serie di Fourier complessa si ha

$$u(x,t) = \sum_n u_n(t) e^{inx}$$

per $t < 2$ si ha

$$\frac{d}{dt} u_n = -(Dn^2 + inv) u_n$$

$$u(x,t) = \sum_n u_n(0) e^{in(x-vt)} e^{-Dn^2 t} .$$

Poiché $u(x,0) = (e^{i2x} + e^{-i2x} + 2)/4 = 1/2 + \cos(2x)/2$ si ha

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \cos(2(x-vt)) \frac{e^{-4Dt}}{2} .$$

Per $t = 2 + \epsilon$ si ha

$$u(x, 2+\epsilon) = \frac{1}{2} + \cos(2(x - vt))\frac{e^{-4Dt}}{2}\bigg|_{t=2+\epsilon} + \sin x$$

ripetendo la procedura per $t > 2$ si ha

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \cos(2(x - vt))\frac{e^{-4Dt}}{2} + \sin(x - v(t-2))e^{-D(t-2)}\,.$$