Esame 4 Luglio 2023

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2022-2023

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
4 Luglio 2023

NOTA 1: **GLI ESERCIZI VANNO CONSEGNATI SU 2 FOGLI DISTINTI**

Es.1, Es.2 ed Es.3 su uno $\longleftrightarrow$ **Es.4, Es.5 ed Es.6 sull'altro**

NOTA 2: **SCRIVERE IN STAMPATELLO SU ENTRAMBI I FOGLI NOME, COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.**
Esempio "DAVID HILBERT, 23011862."

NOTA 3: **Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.**

Esercizio 1 (6 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2 + 2x + 10}\, dx \,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (6 pt)
Espandere la seguente funzione in serie di potenze in $z = 1$ in tutte le regioni di interesse:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-3)^2} \,. \tag{2}$$

Esercizio 3 (3 pt)
Calcolare il seguente integrale

$$I = \int_\gamma z \sin\left(\frac{z+1}{z-1}\right) , \tag{3}$$

dove $\gamma = 2e^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Esercizio 4 (3 pt)
Data la matrice $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

con a reale calcolare $e^{\mathcal{A}}$.

Esercizio 5 (6 pt)
Trovare la soluzione dell'equazione

$$\partial_t f(x,t) = \partial^4_{xxxx} f(x,t) - \alpha f(x,t) + g(x)\,, \tag{5}$$

con $x \in (-\pi,\pi)$, $g(x) = \sin 3x - (\cos x)^2$ e $f(x,0) = \sin 2x - \cos 3x$, e calcolare al variare di α, numero reale non intero,

$$\lim_{t\to\infty} f(x,t)\,. \tag{6}$$

Esercizio 6 (6 pt)
Data la funzione $P(x) = \theta(x)\lambda e^{-\lambda x}$ con λ reale positivo e $\theta(x)$ la funzione gradino calcolare

$$P_N(y) = \int ... \int P(x_1)P(x_2).....P(x_N)\delta(y - \sum_{n=1}^{N} x_n)\, dx_1\, dx_2\, ...\, dx_N\,. \tag{7}$$

Si può pensare $P(x)$ come una densità di probabilità e $P_N(y)$ la densità di probabilità delle somma di N variabili indipendenti, comunque questa osservazione non è strettamente necessaria.

Può essere utile fare prima il caso $N = 2$ ed $N = 3$.

Soluzione Es. 1

Abbiamo che

$$I = \Im J = \Im \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+2x+10}\,dx\,. \tag{8}$$

Condieriamo l seguente funzione

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2+2z+10}\,, \tag{9}$$

analitica in $\mathbb{C}$ tranne che nei punti in cui si annulla il denominatore:

$$z^2+2z+10=0\,, \quad z=z_\pm=-1\pm 3i\,, \tag{10}$$

dove la $f(z)$ ha due poli semplici.

Integriamo la $f(z)$ su un cammino $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_R$, dove

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= t \qquad -R \le t \le R\,, &(11)\\ \gamma_R &= Re^{it}\,, \qquad 0 \le t \le \pi\,. &(12) \end{aligned}$$

Per il teorema dei residui si ha

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,z_+)\,, \tag{13}$$

dove

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz &= J\,, &(14)\\ \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz &= 0\,, \qquad \text{per il Lemma di Jordan}\,. &(15) \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f,z_+) &= \lim_{z\to z_+} \frac{ze^{iz}}{(z-z_-)} = \frac{z_+e^{iz_+}}{(z_+-z_-)} = \frac{(-1+3i)e^{-3}e^{-i})}{6i}\,, &(16)\\ &= \frac{i}{6e^3}[3\cos 1 + \sin 1 + i(\cos 1 - 3\sin 1)]\,. &(17) \end{aligned}$$

In totale

$$J = \frac{\pi}{3e^3}[-(\cos 1 - 3\sin 1) + i(3\cos 1 + \sin 1)] \tag{18}$$

e

$$I = \Im J = \frac{\pi}{3e^3}(3\cos 1 + \sin 1)\,. \tag{19}$$

Soluzione Es. 2

La funzione $f(z)$ ha un polo singolo in $z=0$ e un polo doppio in $z=3$. L'espansione in serie di potenze in $z=1$ avrà quindi tre regioni possibili:

- All'interno del cerchio centrato in $z = 1$ di raggio $R = 1$, la $f(z)$ è analitica e può essere sviluppata in serie di Taylor:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{9z} - \frac{1}{9(z-3)} + \frac{1}{3(z-3)^2}\,, & (20)\\
&= \frac{1}{9[(z-1)+1]} - \frac{1}{9[(z-1)-2]} + \frac{1}{3[(z-1)-2]^2}\,, & (21)\\
&= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n + \frac{1}{18}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n + \frac{1}{12}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{z-1}{2}\right)^{n-1}\,, & (22)\\
&= \frac{1}{36}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4(-2)^n+5+3n}{2^n}\right)(z-1)^n\,. & (23)
\end{aligned}$$

- Nell'anello circolare $1 < |z-1| < 2$ si ha

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{9z} - \frac{1}{9(z-3)} + \frac{1}{3(z-3)^2}\,, & (24)\\
&= \frac{1}{9[(z-1)+1]} - \frac{1}{9[(z-1)-2]} + \frac{1}{3[(z-1)-2]^2}\,, & (25)\\
&= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-1}\right)^{n+1} + \frac{1}{18}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n + \frac{1}{12}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{z-1}{2}\right)^{n-1}, & (26)\\
&= \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(z-1)^n} + \frac{1}{36}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5+3n}{2^n}(z-1)^n\,. & (27)
\end{aligned}$$

La prima serie fornisce la parte principale di Laurent e la seconda la parte analitica.

- Nella regione $|z-1| > 2$ si ha

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{9z} - \frac{1}{9(z-3)} + \frac{1}{3(z-3)^2}\,, & (28)\\
&= \frac{1}{9[(z-1)+1]} - \frac{1}{9[(z-1)-2]} + \frac{1}{3[(z-1)-2]^2}\,, & (29)\\
&= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-1)}\right)^{n+1} - \frac{1}{18}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z-1}\right)^{n+1} + \frac{1}{12}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{z-1}\right)^{n+1}, & (30)\\
&= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(1-2^n)\frac{1}{(z-1)^{n+1}} + \frac{1}{12}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{z-1}\right)^{n+1}\,, & (31)\\
&= \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(1-2^n)\frac{1}{(z-1)^{n+1}} + \frac{1}{12}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{z-1}\right)^{n+1}\,, & (32)\\
&= \frac{1}{18}\sum_{n=1}^{\infty}[2-(2-3n)2^n]\frac{1}{(z-1)^{n+1}}\,. & (33)
\end{aligned}$$

Soluzione Es. 3

La funzione

$$f(z) = z \sin\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \tag{34}$$

ha una singolarità essenziale in $z = 1$ ed una singolarità di tipo polare (polo singolo) nel punto all'infinito. Per il calcolo dell'integrale conviene, quindi, utilizzare il teorema dei residui esterni alla circonferenza su cui integriamo. Si ha

$$I = -2\pi i \mathrm{Res}(f, \infty)\,, \tag{35}$$

dove

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{\xi} f\left(\frac{1}{\xi}\right), 0\right) \tag{36}$$

e

$$-\frac{1}{\xi} f\left(\frac{1}{\xi}\right) = -\frac{1}{\xi^3} \sin\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right). \tag{37}$$

Espandendo il seno fino al secondo ordine in $\xi = 0$ si ottiene

$$\mathrm{Res}\left(-\frac{1}{\xi^3} \sin\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right), 0\right) = -2(\cos 1 - \sin 1)\,. \tag{38}$$

In totale quindi abbiamo

$$I = 4\pi i(\cos 1 - \sin 1)\,. \tag{39}$$

Soluzione Es. 4

La matrice $\mathcal{A}$ puo' essere scritta nella forma

$$\mathcal{A} = a\mathcal{A}_0\,,\; \mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

notare che

$$\mathcal{A}_0^2 = \mathcal{I}$$

quindi

$$\mathcal{A}^{2n} = a^{2n}\mathcal{I}\;,\; \mathcal{A}^{2n+1} = a^{2n+1}\mathcal{A}_0\,,$$

$$e^{\mathcal{A}} = \mathcal{I} + \sum_{n=1} \frac{\mathcal{A}^n}{n!} = \left(1 + \sum_{n=1} \frac{a^{2n}}{(2n)!}\right)\mathcal{I} + \sum_{n=0} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\mathcal{A}_0 = \cosh a\,\mathcal{I} + \sinh a\,\mathcal{A}_0$$

Soluzione Es. 5

Sviluppiamo $f(x,t)$ e $g(x)$ in serie di Fourier complessa:

$$f(x,t) = \sum_n f_n(t) e^{inx}\;,\; g(x) = \sum_n g_n e^{inx}\,,$$

inserendo nell'equazione si ha

$$\frac{d}{dt} f_n = (n^4 - \alpha) f_n + g_n \,.$$

Un modo per risolvere il problema e' trovare il punto fisso $f_n^* = -g_n/(n^4 - \alpha)$ e scrivendo $f_n = f_n^* + h_n$ si ha

$$\frac{d}{dt} h_n = (n^4 - \alpha) h_n \;\rightarrow\; f_n(t) = f_n^* + h_n(0) e^{(n^4 - \alpha)t}$$

quindi considerando la $g(x)$ e la condizione iniziale abbiamo che i valori di n coinvolti sono 0, ± 2 e ± 3, allora se $\alpha > 3^4$ si ha

$$\lim_{t \to \infty} f_n(t) = f_n^*$$

mentre se $\alpha < 3^4$

$$\lim_{t \to \infty} |f_n(t)| = \infty \,,$$

I coefficienti g_n e $f_n(0)$ si calcolano in modo elementare.

Soluzione Es. 6

Usando la funzione caratteristica

$$\phi_x(t) = \int P(x) e^{itx}\, dx = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x} e^{itx}\, dx = \frac{1}{1 - i\frac{t}{\lambda}}$$

abbiamo la funzione caratteristica di y:

$$\phi_y(t) = \Big(\phi_x(t)\Big)^N$$

e quindi

$$P_N(y) = \frac{1}{2\pi} \int \phi_y(t) e^{-ity}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int \Big(\frac{1}{1 - i\frac{t}{\lambda}}\Big)^N e^{-ity}\, dt \,.$$

Questo integrale si puo' calcolare usando la formula integrale di Cauchy:

$$P_N(y) = \theta(y) \frac{\lambda^N}{(N-1)!} y^{N-1} e^{-\lambda y} \,.$$

Ovviamente si puo' arrivare alla stesso risultato anche senza passare per le funzioni caratteristiche, notando che $P_N(y)$ e' una convoluzione multipla:

$$P_2(y) = (P * P)(y) \;,\; P_3(y) = (P_2 * P)(y) = (P * P * P)(y) \;, \ldots . \,.$$

usando le trasformate di Fourier, che sono collegate alle funzioni caratteristiche in modo ovvio:

$$\hat{P}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \phi_x(-k) \,,$$

ed i teorema di convoluzione

$$\hat{P}_N(k) = \Big(\sqrt{2\pi}\Big)^{N-1} \Big(\hat{P}(k)\Big)^N \;,\; P_N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{iky} \hat{P}_N(k)\, dk$$