Esame 5 Luglio 2022

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2021-2022

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
5 Luglio 2022

NOTA: **GLI ESERCIZI VANNO CONSEGNATI SU 2 FOGLI DISTINTI**

Es.1 e Es.2 su uno $\longleftrightarrow$ **Es.3 e Es.4 sull'altro**

SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA. Esempio "D. Hilbert, 23011862."

Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (9 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\sinh(x)} dx \,, \qquad 0 < \alpha < 1 \,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (6 pt)
Studiare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}\sqrt{\frac{2+z}{1+z}} \tag{2}$$

e calcolare l'integrale

$$\int_\gamma f(z)\, dz \,, \tag{3}$$

dove $\gamma = 5e^{it}$, con $0 \le t < 2\pi$.

Esercizio 3 (5 pt)
3a) Sia $\mathcal{P}$ un proiettore su un vettore $\mathbf{v} \in R^N$: dire se l'operatore è autoggiunto e trovare i sui autovalori.
3b) $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ sono proiettori sui vettori $\mathbf{v}_1 \in R^3$ e $\mathbf{v}_2 \in R^3$ che sono tra loro ortogonali e

$$\mathcal{A} = a\mathcal{P}_2 + b\mathcal{I} + ce^{\mathcal{P}_2 + 2\mathcal{P}_1} \,, \tag{4}$$

ove $\mathcal{I}$ è l'operatore identità, determinare i valori di a, b e c tali che esista $\mathcal{A}^{-1}$.

Esercizio 4 (10 pt)
Data l'equazione

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - f = \delta(x-1) \,, \tag{5}$$

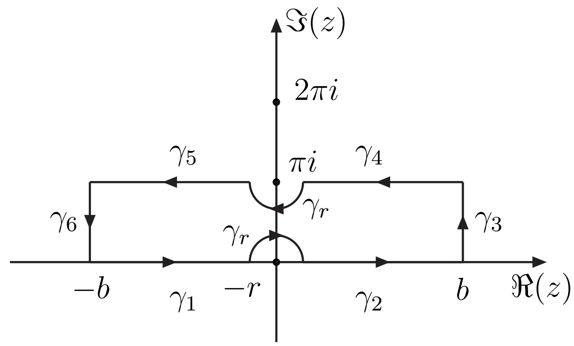
trovare la soluzione $f(x)$ nei seguenti casi:
4a) condizioni al bordo $f(-\infty) = f(\infty) = 0$;
4b) condizioni al bordo $f(0) = f(\infty) = 0$.

Soluzione Es. 1

Per calcolare l'ingegrale consideriamo la seguente funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{\sinh(z)}\,, \tag{6}$$

che ha poli singoli in $z = i\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Integriamo la $f(z)$ sul cammino chiuso in Figura.



Per il teorema di Cauchy avremo:

$$\lim_{\substack{b\to\infty \\ r\to 0}} \int_\Gamma f(z)\,dz = 0\,. \tag{7}$$

D'altra parte si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{b\to\infty \\ r\to 0}} \int_\Gamma f(z)\,dz &= I - i\pi\mathrm{Res}(f,0) + \lim_{b\to\infty}\int_0^\pi \frac{e^{\alpha(b+iy)}}{\sinh(b+iy))} i dy - i\pi \mathrm{Res}(f, i\pi) \\ &\quad - \lim_{\substack{b\to\infty \\ r\to 0}} e^{i\alpha\pi}\int_{\gamma_4+\gamma_5} \frac{e^{\alpha x}}{\sinh(x+i\pi)}dx - \lim_{b\to\infty}\int_0^\pi \frac{e^{\alpha(-b+iy)}}{\sinh(-b+iy))} i dy\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Abbiamo

$$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} z\frac{e^{\alpha z}}{\sinh(z)} = 1\,, \tag{9}$$

$$\mathrm{Res}(f,i\pi) = \lim_{z\to i\pi}(z-i\pi)\frac{e^{\alpha z}}{\sinh(z)} = -e^{i\alpha\pi}\,, \tag{10}$$

$$\sinh(x+i\pi) = -\sinh(x)\,, \tag{11}$$

per cui

$$\lim_{\substack{b\to\infty \\ r\to 0}} e^{i\alpha\pi}\int_{\gamma_4+\gamma_5} \frac{e^{\alpha x}}{\sinh(x+i\pi)}dx = -e^{i\alpha\pi} I\,. \tag{12}$$

Per i due integrali sui segmenti laterali si ha (visto che $0 < \alpha < 1$)

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^\pi \frac{e^{\alpha(b+iy)}}{\sinh(b+iy))} i dy = \lim_{b\to\infty}\int_0^\pi 2\frac{e^{\alpha b}e^{iby)}}{e^b e^{iy} - e^{-b}e^{-iy}} i dy \overset{\sim e^{(\alpha-1)b}}{\rightarrow} 0\,, \tag{13}$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{\alpha(-b+iy)}}{\sinh\left(-b+iy\right))}idy \quad = \quad \lim_{b\to\infty}\int_0^{\pi}2\frac{e^{-\alpha b}e^{iby)}}{e^{-b}e^{iy}-e^{b}e^{-iy}}idy \overset{\sim e^{-(\alpha+1)b}}{\to} 0\,. \tag{14}$$

Infine, la (7) si può riscrivere come

$$I\left(1+e^{i\alpha\pi}\right)=i\pi\left(1-e^{i\alpha\pi}\right), \tag{15}$$

da cui

$$I=i\pi\frac{\left(1-e^{i\alpha\pi}\right)}{\left(1+e^{i\alpha\pi}\right)}=\pi\,\tan\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right). \tag{16}$$

Soluzione Es. 2

La $f(z)$ è una funzione polidroma. Ha un polo singolo in $z=i$ e uno in $z=-i$. Inoltre, a causa della radice, ha due punti di diramazione in $z=-2$ e in $z=-1$. Nel punto all'infinito si ha

$$f\left(\frac{1}{\omega}\right)=\frac{\omega}{1+\omega^2}\sqrt{\frac{2\omega+1}{\omega+1}}\,, \tag{17}$$

che quindi per $\omega\to 0$ ha uno zero di ordine 1 (ed in particolare l'infinito non è punto di diramazione).

Il taglio per la $f(z)$ quindi si prende al finito, che colleghi i due punti di diramazione $z=-1$ e $z=-2$.

L'integrale si può fare utilizzando il teorema dei residui (esterni alla curva), calcolando il residuo nel punto all'infinito. All'interno della curva, infatti, non ci sono solo punti di singolarità isolata, ma anche il taglio.

Si ha

$$\int_\gamma f(z)\,dz=-2\pi i\,\mathrm{Res}(f,\infty)=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\omega^2}f\left(\frac{1}{\omega}\right),0\right)\,, \tag{18}$$

dove

$$\frac{1}{\omega^2}f\left(\frac{1}{\omega}\right)=\frac{1}{\omega(1+\omega^2)}\sqrt{\frac{2\omega+1}{\omega+1}} \tag{19}$$

e quindi:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\omega^2}f\left(\frac{1}{\omega}\right),0\right)=1\,. \tag{20}$$

Infine

$$\int_\gamma f(z)\,dz=2\pi i\,. \tag{21}$$

Soluzione Es. 3

3a) L' operatore e' autoggiunto, come si vede dalla sua espressione in termini di $\mathbf{v}$:

$$P_{ij}=\frac{v_i v_j}{|\mathbf{v}|^2}$$

ovviamente un autovalore e' 1 in fatti

$$\mathcal{P}\mathbf{v}=\mathbf{v}$$

gli altri $N-1$ autovalori sono 0 ed hanno per autovettori $N-1$ vettori tra loro perpendicolari e perpendicolari a $\mathbf{v}$.
3b) Usando il teorema spettrale si ottiene

$$\mathcal{A} = a\mathcal{P}_2 + b\Big(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3\Big) + c\Big(e^2\mathcal{P}_1 + e\mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3\Big) = (b+ce^2)\mathcal{P}_1 + (a+b+ce)\mathcal{P}_2 + (b+c)\mathcal{P}_3$$

quindi la matrice inversa esiste se

$$b + ce^2 \neq 0 \ , \ a + b + ce \neq 0 \ , \ b + c \neq 0$$

Soluzione Es. 4

Caso 4a): passando in trasformata di Fourier si ha

$$\hat{f}(k) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ik}}{k^2 + 1}$$

antitrasformando, con un facile calcolo con i residui si ha:

$$f(x) = -\frac{1}{2} e^{-|x-1|} \ .$$

Lo stesso risultato si puo' ottenere risolvendo l'equazione per $x > 1$, tenendo conto della condizione al contorno si ha

$$f(x) = ae^{-x}$$

analogamente per $x < 1$, tenendo conto della condizione al contorno si ha

$$f(x) = be^{x}$$

a e b si ottengono dalle condizioni di raccordo in $x = 1$ per f e f'
Caso 4b): se si utilizza il metodo delle immagini e' immediato vedere che $f(x)$ e' la soluzione per $x > 0$ del problema

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - f = \delta(x - 1) - \delta(x + 1)$$

con condizioni al bordo $f(-\infty) = f(\infty) = 0$.
Quindi usando il risultato precedente si ha

$$f(x) = -\frac{1}{2} e^{-|x-1|} + \frac{1}{2} e^{-|x+1|} \ .$$

Oppure risolvendo l'equazione per $x > 1$, tenendo conto della condizione al contorno si ha

$$f(x) = ae^{-x}$$

analogamente per $0 < x < 1$:

$$f(x) = be^{x} + ce^{-x}$$

a, b e c si ottengono dalle condizioni di raccordo in $x = 1$ per f e f' e la condizione al bordo in $x = 0$