Esame 7 Febbraio 2024

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2022-2023

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
7 Febbraio 2024

NOTA 1: **GLI ESERCIZI VANNO CONSEGNATI SU 2 FOGLI DISTINTI**

Es.1, Es.2 ed Es.3 su uno $\longleftrightarrow$ **Es.4, Es.5 ed Es.6 sull'altro**

NOTA 2: **SCRIVERE IN STAMPATELLO SU ENTRAMBI I FOGLI NOME, COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.**
Esempio "DAVID HILBERT, 23011862."

NOTA 3: **Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.**

Esercizio 1 (6 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} \,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (4 pt)
Consideriamo il piano complesso con taglio sul semi-asse reale negativo e i seguenti rami delle funzioni polidrome

$$f_1(z) \;=\; \ln^2 z \,, \quad f_1(1) = 0 \,, \tag{2}$$
$$f_2(z) \;=\; \sqrt{z}\ln z \,, \quad f_2(2) \in \mathbb{R}^- \,. \tag{3}$$

Calcolare le seguenti discontinuità:

$$\Delta_1 = f_1(-x+i0^+) - f_1(-x-i0^+) \,, \qquad \Delta_2 = f_2(-x+i0^+) - f_2(-x-i0^+) \,, \tag{4}$$

dove $x \in \mathbb{R}^+$, $x \neq 0$.

Esercizio 3 (5 pt)
Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + e^{-ay}\cos x \,, \tag{5}$$

è la parte reale di una funziona analitica, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ e determinare la parte immaginaria $v(x,y)$ tale che in $x = y = 0$ valga $v(0,0) = 0$.

Esercizio 4 (4 pt)
Si **A** una matrice 3x3 i cui elementi non nulli sono

$$A_{ii} = 2 \;,\; A_{13} = 1 \,, \tag{6}$$

si trovi la soluzione dell'equazioni differenziale

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \ , \ \ \mathbf{x} \in R^3 \tag{7}$$

con condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = (1, -1, 2)$.

Esercizio 5 (5 pt)
Sia $\mathbf{x} = (x_0, x_1, ..., x_{N-1})$ un vettore con componenti complesse, e $\mathcal{F}$ l'operatore lineare che trasforma $\mathbf{x}$ in $\mathbf{u} = \mathcal{F}\mathbf{x}$ nel modo seguente

$$u_k = \sum_{n=0}^{N-1} F_{kn} x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} x_n \ , \ \ k = 0, 1, 2, ..., N-1 \tag{8}$$

ove $i = \sqrt{-1}$, mostrare che $\mathcal{F}$ è un operatore unitario e calcolare $\mathcal{F}^{-1}$, cioè la matrice $(F^{-1})_{kn}$.

Esercizio 6 (6 pt)
Trovare la soluzione per $t > 0$ dell'equazione

$$\partial_t u(x,t) = \partial^2_{xx} u(x,t) + 9 \sin 3x \tag{9}$$

ove $0 \leq x \leq 2\pi$, con condizioni al bordo

$$u(0,t) = u(2\pi, t) \ , \ \ \partial_x u(0,t) = \partial_x u(2\pi, t) \tag{10}$$

e condizione iniziale

$$u(x, 0) = 2 \sin 3x - \cos 2x + 1 \, . \tag{11}$$

Soluzione Es. 1

Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)\sqrt{z}}\,, \tag{12}$$

che ha un polo singolo in $z = -1$ e un punto di diramazione in $z = 0$. Sfruttiamo il taglio della funzione polidroma, che poniamo sul semiasse reale positivo e integriamo la $f(z)$ su un cammino chiuso $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, tale che

$$\gamma_1 = x + i0^+\,, \quad \text{con } 0 \le x \le R\,, \tag{13}$$
$$\gamma_2 = Re^{i\theta}\,, \quad \text{con } 0 \le \theta \le 2\pi\,, \tag{14}$$
$$\gamma_3 = x - i0^+\,, \quad \text{con } R \le x \le 0\,, \tag{15}$$
$$\gamma_4 = re^{i\theta}\,, \quad \text{con } -2\pi \le \theta \le 0\,. \tag{16}$$

Per il teorema dei residui si ha

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\text{Res(f,-1)} = 2\pi\,, \tag{17}$$

poiché

$$\text{Res(f,-1)} = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{1}{(z+1)\sqrt{z}} = -i\,. \tag{18}$$

D'altra parte si ha

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = I\,, \tag{19}$$
$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0\,, \tag{20}$$
$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \int_R^r \frac{1}{(x+1)(-\sqrt{x})} = I\,, \tag{21}$$
$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_4} f(z)\,dz = -\lim_{r\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}\,d\theta}{(re^{i\theta}+1)\sqrt{r}e^{i\theta/2}} = 0\,. \tag{22}$$

Per cui, in totale si ha:

$$I = \pi\,. \tag{23}$$

Soluzione Es. 2

Se $\ln^2(1) = 0$ vuol dire che stiamo considerando il ramo principale del logaritmo. Quindi

$$\Delta_1 = \ln^2(-x + i0^+) - \ln^2(-x - i0^+) = (\ln x + i\pi)^2 - (\ln x - i\pi)^2 = 4i\pi\,\ln x\,. \tag{24}$$

Analogamente, se in $z = 2$ la $f_2(z)$ è reale negativa, vuol dire che abbiamo scelto il ramo principale del logaritmo e il ramo secondario della radice. Quindi

$$\Delta_2 = \sqrt{-x + i0^+}(\ln x + i\pi) - \sqrt{-x - i0^+}(\ln x - i\pi)\,,$$

$$
\begin{aligned}
&= -i\sqrt{x}(\ln x + i\pi) - i\sqrt{x}(\ln x - i\pi)\,, \\
&= -2i\sqrt{x}\ln x\,. \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Soluzione Es. 3

Affinché $u(x,y)$ sia la parte reale di una funzione analitica deve essere armonica. Si ha

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 2x - e^{-ay}\sin x\,, &(26)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2 - e^{-ay}\cos x\,, &(27)\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -2y - ae^{-ay}\cos x\,, &(28)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -2 + a^2 e^{-ay}\cos x\,, &(29)
\end{aligned}
$$

quindi per avere $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ si deve avere $a = \pm 1$.

Utilizzando le equazioni di Cauchy-Riemann si ha

$$
\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - e^{-ay}\sin x\,, \qquad (30)
$$

per cui

$$
v(x,y) = 2xy + \frac{1}{a}e^{-ay}\sin x = 2xy + ae^{-ay}\sin x + g(x)\,, \qquad (31)
$$

poiché $a^2 = 1$. D'altra parte $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ e quindi

$$
2y + ae^{-ay}\cos x + g'(x) = 2y + ae^{-ay}\cos x\,, \qquad (32)
$$

da cui $g(x) = cost$. La soluzione generale è quindi

$$
v(x,y) = 2xy + ae^{-ay}\sin x + cost \qquad (33)
$$

e imponendo $v(0,0) = 0$ si ha che la costante deve essere nulla:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= u(x,y) + iv(x,y) = x^2 - y^2 + e^{\mp y}\cos x + i\left(2xy + \pm e^{\mp y}\sin x\right)\,, &(34)\\
&= z^2 + e^{\pm iz}\,. &(35)
\end{aligned}
$$

Soluzione Es. 4

Notare che la matrice ha la forma

$$
\mathbf{A} = 2\mathbf{I} + \mathbf{B}
$$

ove $\mathbf{B}$ ha tutti gli elementi nulli a parte $B_{13} = 1$, poiché $\mathbf{B}^n = 0$ per $n \geq 2$, si ha

$$
(t\,\mathbf{A})^n = (2t)^n\mathbf{I} + n2^{n-1}t^n\mathbf{B}
$$

da cui

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \sum_{n=1} \frac{(2t)^n}{n!}\mathbf{I} + \sum_{n=1} \frac{n2^{n-1}t^n}{n!}\mathbf{B} = e^{2t}\Big(\mathbf{I} + t\mathbf{B}\Big)$$

quindi

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t}\Big(\mathbf{I} + t\mathbf{B}\Big)\mathbf{x}(0)\,.$$

Soluzione Es. 5

La matrice aggiunta di $\mathcal{F}$ ha elementi

$$F^*_{kn} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{+i\frac{2\pi}{N}kn}$$

abbiamo quindi

$$(F^*F)_{kj} = \sum_n F^*_{kn}F_{nj} = \frac{1}{N}\sum_n e^{i\frac{2\pi}{N}n(k-j)}$$

ovviamente

$$(F^*F)_{jj} = 1$$

per gli elementi non diagonali con $k \neq j$ usiamo la formula, valida per $a \neq 1$

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$$

se $k \neq j$ abbiamo

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}n(k-j)} = \sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{i\frac{2\pi}{N}(k-j)}\right)^n = \frac{1-e^{i2\pi(k-j)}}{1-e^{i\frac{2\pi}{N}(k-j)}} = \frac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{N}(k-j)}} = 0$$

quindi $\mathcal{F}$ é unitaria e

$$(F^{-1})_{kn} = F^*_{kn} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{+i\frac{2\pi}{N}kn}$$

Soluzione Es. 6

La soluzione stazionaria, che soddisfa l'equazione

$$\frac{d^2}{dx^2}u^*(x) + 9\sin 3x = 0$$

é $u^*(x) = \sin 3x$, scrivendo

$$u(x,t) = u^*(x) + f(x,t)$$

si ha

$$\partial_t f(x,t) = \partial^2_{xx} f(x,t)$$

con

$$f(x,0) = u(x,0) - u^*(x) = \sin 3x - \cos 2x + 1\,.$$

Usando il metodo delle separazioni delle variabili, o equivalentemente, lo sviluppo in serie di Fourier, si ha

$$f(x,t) = \sin 3x\, e^{-9t} - \cos 2x\, e^{-4t} + 1 \quad \rightarrow \quad u(x,t) = \sin 3x\, e^{-9t} - \cos 2x\, e^{-4t} + 1 + \sin 3x$$

notare che per le condizioni al bordo sia hanno seni, coseni e anche la costante.