Esame 8 Febbraio 2023

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2021-2022

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
8 Febbraio 2023

NOTA: **GLI ESERCIZI VANNO CONSEGNATI SU 2 FOGLI DISTINTI**

Es.1 e Es.2 su uno $\longleftrightarrow$ **Es.3 e Es.4 sull'altro**

SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA. Esempio "D. Hilbert, 23011862."

Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (10 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos(\ln(x))}{x^2+1}\, dx\,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (5 pt)
Studiare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{z}{z^2-1}\cos\left(\frac{\pi z}{z+1}\right) \tag{2}$$

e calcolarne il residuo nel punto all'infinito.

Esercizio 3 (6 pt)
Data l'equazioni differenziale

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}\ ,\ \mathbf{x} \in R^4 \tag{3}$$

ove

$$A_{ij} = 1 - \delta_{ij} \tag{4}$$

1. calcolare $\mathbf{x}(t)$ dato $\mathbf{x}(0)$
2. determinare la condizione che deve soddisfare $\mathbf{x}(0)$ in modo tale che $\lim_{t\to\infty}\mathbf{x}(t) = 0$

Esercizio 4 (9 pt)
Si consideri l'equazione

$$\partial_t f(x,t) = t\partial^2_{xx} f(x,t) \tag{5}$$

con $x \in [0, 2\pi]$ con condizioni periodiche al bordo per $f(x,t)$:

$$f(0,t) = f(2\pi,t)\ ,\ \left.\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right|_{x=2\pi}, \tag{6}$$

e condizione iniziale

$$f(x,0) = 2(\cos x)^2\,, \tag{7}$$

calcolare $f(x,t)$.

Soluzione Es. 1

Abbiamo che

$$I = \Re \int_0^\infty \frac{e^{i\ln(x)}}{x^2+1}\, dx \tag{8}$$

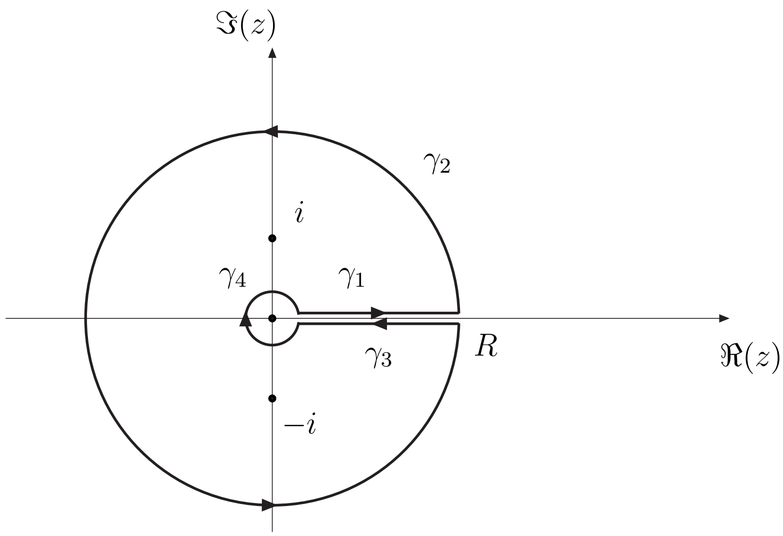
e calcoliamo

$$I' = \int_0^\infty \frac{e^{i\ln(x)}}{x^2+1}\, dx\,. \tag{9}$$

Per fare ciò consideriamo la seguente funzione di variabile complessa[1]

$$f(z) = \frac{e^{i\ln(z)}}{z^2+1}\,. \tag{13}$$

La $f(z)$ è una funzione polidroma, che ha un taglio che parte da $z = 0$ fino al punto all'infinito. Inoltre, ha due poli singoli in $z = \pm i$. Per valutare I' integriamo la $f(z)$ su un cammino come in figura



Facendo l'integrale su $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, si può applicare il teorema dei residui:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\, \left[\mathrm{Res}\,(f,-i) + \mathrm{Res}\,(f,i)\right]\,, \tag{14}$$

[1]Si può anche tenere il $\cos(\ln x)$ e considerare, integrando sullo stesso cammino, la

$$f(z) = \frac{\cos(\ln(z))}{z^2+1}\,, \tag{10}$$

ovviamente. In ogni caso si avrà su γ_1

$$f(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x^2+1} \tag{11}$$

e su γ_2

$$f(x) = \frac{\cos(\ln(x)+2\pi i)}{x^2+1} = e^{-2\pi}\frac{\cos(\ln(x))}{x^2+1}\,. \tag{12}$$

dove

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,(f,-i) &= -\frac{1}{2i}e^{-\frac{3}{2}\pi}\,, &(15)\\ \mathrm{Res}\,(f,i) &= \frac{1}{2i}e^{-\frac{\pi}{2}}\,. &(16)\end{aligned}$$

Per l'integrale su Γ si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty,r\to 0}\int_{\gamma_1} f(z) &= \int_0^\infty \frac{e^{i\ln(x)}}{x^2+1}dx\,, &(17)\\ \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z) &= \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\ln(R)-\theta}}{R^2e^{i2\theta}+1}\,iRe^{i\theta}\,d\theta = 0\,, &(18)\\ \lim_{R\to\infty,r\to 0}\int_{\gamma_3} f(z) &= \int_\infty^0\left(\frac{e^{i\ln(x)-2\pi}}{x^2+1}\right)dx = -e^{-2\pi}\int_0^\infty\frac{e^{i\ln(x)}}{x^2+1}dx\,, &(19)\\ \lim_{r\to 0}\int_{\gamma_4} f(z) &= \lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\ln(r)-\theta}}{r^2e^{i2\theta}+1}\,ire^{i\theta}\,d\theta = 0\,. &(20)\end{aligned}$$

In totale quindi si ha

$$\left(1-e^{-2\pi}\right)I' = \pi\left(e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{3}{2}\pi}\right)\,, \tag{21}$$

ovvero

$$I' = \pi\frac{\left(e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{3}{2}\pi}\right)}{\left(1-e^{-2\pi}\right)} = \pi\frac{\left(e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}\right)}{\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)} = \pi\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sinh(\pi)}\,. \tag{22}$$

Per cui

$$I = \pi\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sinh(\pi)} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}\,. \tag{23}$$

Soluzione Es. 2

La funzione $f(z)$ ha al finito due possibili punti saingolari in $z=\pm 1$. Il punto in $z=1$ annulla in denominatore, ma annulla anche il coseno, in maniera tale che il limite sia finito

$$\lim_{z\to 1}\frac{z}{z^2-1}\cos\left(\frac{\pi z}{z+1}\right) = -\frac{\pi}{8}\,. \tag{24}$$

Quindi è un punto di singolarità eliminabile. Il punto $z=-1$, invece, è un punto di singolarità essenziale.

Nel punto all'infinito si ha

$$f\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{\omega}{(1-\omega^2)}\cos\left(\frac{\pi}{\omega+1}\right)\,. \tag{25}$$

Quindi il punto all'infinito è un punto regolare per $f(z)$. Ciò nonostante la funziona ha un residuo non nullo all'infinito. Infatti, si ha

$$\mathrm{Res}\,(f,\infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{\omega^2}f\left(\frac{1}{\omega}\right),0\right) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{\omega(1-\omega^2)}\cos\left(\frac{\pi}{\omega+1}\right),0\right) = 1\,. \tag{26}$$

Soluzione Es. 3

Possiamo scrivere

$$\mathcal{A} = 4\mathcal{P}_{\mathcal{I}} - \mathcal{I}$$

ove $\mathcal{I}$ e' la matrice identita' e $\mathcal{P}_1$ e' la matrici con tutti gli elementi 1/4 che e' il proiettore sul vettore $\mathbf{v}^{(1)}$

$$\mathbf{v}^{(1)} = \Big(\frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{4}},\Big) .$$

Usando la proprieta'

$$\mathcal{I} = \sum_{n=1}^{4} \mathcal{P}_n$$

ove $\mathcal{P}_n$ sono proiettori su vettori tra loro ortogonali, abbiamo

$$\mathcal{A} = 3\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_4 .$$

Dal teorema spettrale si ha

$$e^{t\mathcal{A}} = e^{3t}\mathcal{P}_1 + e^{-t}\mathcal{P}_2 + e^{-t}\mathcal{P}_3 + e^{-t}\mathcal{P}_4 = \Big(e^{3t} - e^{-t}\Big)\mathcal{P}_1 + e^{-t}\mathcal{I} ,$$

si ottiene lo stesso risultato ricordando che $(\mathcal{P}_1)^n = \mathcal{P}_1$ per $n \geq 2$:

$$e^{t\mathcal{A}} = e^{-t}\, e^{4t\mathcal{P}_1} \quad , \quad e^{4t\mathcal{P}_1} = \mathcal{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4t)^n}{n!} (\mathcal{P}_1)^n = \mathcal{I} + (e^{4t} - 1)\mathcal{P}_1$$

si ha quindi

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathcal{A}}\mathbf{x}(0) .$$

Per avere $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0$ il vettore $\mathbf{x}(0)$ deve essere perpendicolare a $\mathbf{v}^{(1)}$:

$$(\mathbf{x}(0), \mathbf{v}^{(1)}) = \sum_{n=1}^{4} x_n(0) v_n^{(1)} = 0 ,$$

quindi la condizione iniziale deve soddisfare

$$\sum_{n=1}^{4} x_n(0) = 0 .$$

Soluzione Es. 4

La $f(x, 0)$ puo' essere scritta nella forma

$$f(x, 0) = 2\Big(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\Big)^2 = \frac{1}{2}\Big(e^{i2x} + e^{-i2x} + 2\Big) = 1 + \cos 2x .$$

Scrivendo la $f(x,t)$ in serie di Fourier complessa

$$f(x,t) = \sum_n f_n(t) e^{inx}$$

si ha

$$\frac{d}{dt} f_n = -n^2 t f_n \;\rightarrow\; f_n(t) = f_n(0) e^{-\frac{n^2 t^2}{2}} \,.$$

Quindi

$$f(x,t) = \sum_n f_n(0) e^{-\frac{n^2 t^2}{2}} e^{inx}$$

poiché nella $f(x,0)$ sono presente solo 3 termini non nulli: $n=-2$, $n=0$ e $n=2$, si ottiene

$$f(x,t) = 1 + \cos 2x \, e^{-2t^2} \,.$$