Esame 8 Settembre 2023

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2022-2023

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
8 Settembre 2023

NOTA 1: $\boxed{\textbf{GLI ESERCIZI VANNO CONSEGNATI SU 2 FOGLI DISTINTI}}$

$\boxed{\textbf{Es.1, Es.2 ed Es.3 su uno}}$ $\longleftrightarrow$ $\boxed{\textbf{Es.4, Es.5 ed Es.6 sull'altro}}$

NOTA 2: **SCRIVERE IN $\boxed{\textbf{STAMPATELLO}}$ SU ENTRAMBI I FOGLI NOME, COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.**
Esempio "DAVID HILBERT, 23011862."

NOTA 3: **Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.**

Esercizio 1 (6 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sinh(x)}\, dx \,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (6 pt)
Studiare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = \frac{\log(1+z^2)}{(1-z)\sinh(z)} \,. \tag{2}$$

Calcolare i primi 2-3 termini dell'espansione in serie di potenze di $f(z)$ in $z = 0$ e dire qual'è il raggio di convergenza della serie. Calcolare l'integrale

$$J = \int_\gamma f(z)\, dz \,, \tag{3}$$

dove $\gamma = 1 + e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Esercizio 3 (3 pt)
Trovare l'immagine del dominio $D = \{|z| < 1, \Im z > 0\}$ tramite la traformazione conforme (commentare)

$$w = \frac{1-z}{1+z} \,. \tag{4}$$

Esercizio 4 (3 pt)
Data l'equazione

$$\frac{d}{dt}x = -ax + by \quad , \quad \frac{d}{dt}y = ax - by \tag{5}$$

con a e b reali e positivi e condizione iniziale

$$x(0) = y(0) = \frac{1}{2}\,, \tag{6}$$

trovare il tempo t_* tale che per $t > t_*$ si ha

$$|x(t) - x_*| < 10^{-3} \;\;,\;\; x_* = \lim_{t\to\infty} x(t)\,. \tag{7}$$

Esercizio 5 (6 pt)
Trovare la soluzione dell'equazione

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x) - G(x) = \delta(x - 1/2)\,, \tag{8}$$

con $G(x)$ continua e condizioni al bordo

$$G(0) = G(1) = 0\,. \tag{9}$$

Esercizio 6 (6 pt)
Data la funzione

$$P(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)} \tag{10}$$

calcolare

$$P_N(y) = \int ... \int P(x_1)P(x_2).....P(x_N)\delta(y - \sum_{n=1}^{N} x_n)\, dx_1\, dx_2\, ...\, dx_N\,. \tag{11}$$

Si puo' pensare $P(x)$ come una densità di probabilità e $P_N(y)$ la densità di probabilità delle somma di N variabili indipendenti, comunque questa osservazione non è strettamente necessaria.

Può essere utile fare prima il caso $N = 2$ ed $N = 3$.

Soluzione Es. 1

Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{z}{\sinh(z)}\,, \tag{12}$$

che ha una singolarità rimovibile in $z = 0$ (il limite della funzione è 1) e delle singolarità polari (poli singoli) in $z = ik\pi$ con $k \in \mathbb{Z}/0$.

Consideriamo un cammino d'integrazione rettangolare, $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_r + \gamma_4 + \gamma_5$ dove

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= x\,, \quad -b \le x \le b\,, & (13)\\
\gamma_2 &= b + iy\,, \quad 0 \le y \le \pi\,, & (14)\\
\gamma_3 &= x + i\pi\,, \quad b \ge x \ge r\,, & (15)\\
\gamma_r &= i\pi + e^{ir}\,, \quad 0 \le r \le -\pi\,, & (16)\\
\gamma_4 &= x + i\pi\,, \quad r \ge x \ge -b\,, & (17)\\
\gamma_5 &= -b + iy\,, \quad \pi \ge y \ge 0 & (18)
\end{aligned}$$

Allora, per il teorema di Cauchy si ha

$$\lim_{\substack{b\to\infty\\ r\to 0}} \int_\Gamma = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sinh(x)}\,dx - i\pi\,\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sinh(x)}\,dx + i\pi\,\mathrm{Res}(f, i\pi) = 0\,, \tag{19}$$

poiché gli integrali sui segmenti a $x = b$ e $x = -b$ danno contributo nullo.

Abbiamo

$$\mathrm{Res}(f, i\pi) = \lim_{z\to i\pi}(z - i\pi)f(z) = i\pi\,. \tag{20}$$

Quindi in totale, ponendo

$$J = \mathrm{PV}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sinh(x)}\,dx\,, \tag{21}$$

si ha

$$2\,I - i\pi\,J = \pi^2\,, \tag{22}$$

ovvero

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi^2}{2}\,, & (23)\\
J &= 0\,. & (24)
\end{aligned}$$

La relazione $J = 0$ si può anche controllare facendo effettivamente l'integrale in valor principale.

Soluzione Es. 2

La funzione è polidroma, e ciò è dovuto al logaritmo che ha due punti di diramazione al finito $z_\pm = \pm i$ e il punto all'infinito che è doppio. Quindi abbiamo un taglio che unisce z_+ al punto all'infinito e uno che unisce z_- al punto all'infinito. Si possono prendere lungo l'asse immaginaria. In $z = 0$ abbiamo una singolarità rimovibile. La funzione infatti ha in

$z = 0$ limite nullo. Inoltre ha un polo singolo in $z = 1$ e altre singolarità polari (poli singoli) nei punti in cui si annulla il $\sinh(z)$, ovvero $z = ik\pi$ con $k \in \mathbb{Z}/0$. Il punto all'infinito è anche un punto di singolarità essenziale.

La funzione è analitica in un intorno di $z = 0$ e può essere espressa in serie di Taylor in $z = 0$, convergente entro un raggio di convergenza $R = 1$, che si trova considerando i punti di non analiticità più vicini a $z = 0$. Si ha

$$f(z) \simeq z + z^2 + \frac{z^3}{3} + ... \tag{25}$$

Per l'integrale si può utilizzare il teorema dei residui, per il quale

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\,(f(z), 1) \ , \tag{26}$$

dove

$$\mathrm{Res}\,(f(z), 1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = -\frac{\log(2)}{\sinh(1)} = \frac{2e\log(2)}{1-e^2}\,. \tag{27}$$

Quindi

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \frac{4\pi e \log(2)\, i}{1-e^2}\,. \tag{28}$$

Soluzione Es. 3

La trasformazione in oggetto è una trasformazione di Möbius, conforme in tutto il piano esteso. L'inversa è una trasformazione conforme che possiamo scrivere come segue:

$$z = \frac{1-w}{1+w}\,. \tag{29}$$

Dobbiamo trovare il luogo geometrico che corrisponde a $D = \{|z| < 1, \Im z > 0\}$ dove

$$|z| = \frac{|1-w|}{|1+w|}\,, \tag{30}$$

$$z = \frac{(1-w)(1+\overline{w})}{|1+w|^2} = \frac{\left[1-(\Re(w))^2-(\Im(w))^2\right] + i\,2\Im(w)}{|1+w|^2} \ \Rightarrow\ \Im z = \frac{2\Im(w)}{|1+w|^2}\,. \tag{31}$$

Quindi, siccome si ha che la relazione $|1-w| < |1+w|$ corrisponde al semipiano aperto $\Re(w) > 0$, il semicerchio aperto viene mappato nel IV quadrante (aperto): $\{\Re(w) > 0, \Im w < 0\}$.

Soluzione Es. 4

Notando che $x + y$ è costante e $x(0) + y(0) = 1$, si può scrivere $y = 1 - x$, ci si riduce ad una sola equazione:

$$\frac{d}{dt}x = -(a+b)x + b\ .$$

Il punto fisso e' $x_* = b/(a+b)$, scrivendo

$$x(t) = x_* + z(t)$$

si ha

$$\frac{d}{dt} z = -(a+b)z \ , \ \ z(t) = z(0)e^{-(a+b)t} \ , \ \ z(0) = \frac{1}{2} - x_* \, .$$

La legge di conservazione $x+y = costante$, nel caso non lo si capisca "ad occhio" guardando l'equazione differenziale, è chiara dal fatto che la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -a & b \\ a & -b \end{pmatrix}$$

ha un autovalore nullo.
Notare che poiché $a+b<0$, $z(t)$ tende a zero e $x_* = \lim_{t\to\infty} x(t)$, quindi se $|z(0)| > 10^{-3}$, il tempo t_* è dato da

$$|z(0)|e^{-(a+b)t_*} = 10^{-3} \, ,$$

ovviamente se $|z(0)| < 10^{-3}$, si ha $t_* = 0$.

Soluzione Es. 5

Per $x < 1/2$ si ha

$$G(x) = Ae^x + Be^{-x}$$

imponendo la condizione al bordo in $x = 0$ si ha $B = -A$ quindi

$$G(x) = 2A \sinh x \, .$$

Ripetendo la procedura per $x > 1/2$ ed imponendo la condizione al bordo in $x = 1$ si ha

$$G(x) = 2C \sinh(x-1) \, .$$

Le costanti A e C si trovano facilmente ricordando che
a) $G(x)$ è continua in $x = 1/2$, quindi $C = -A$;
b) integrando l'equazione tra $1/2 - \epsilon$ e $1/2 + \epsilon$ si ha

$$\frac{dG}{dx}\Big|_{1/2+\epsilon} - \frac{dG}{dx}\Big|_{1/2-\epsilon} = 1 \, .$$

Soluzione Es. 6

Usando la funzione caratteristica, con un semplice calcolo con i residui si ha

$$\phi_x(t) = \int P(x)e^{itx}\, dx = \int_0^\infty \frac{1}{\pi(x^2+1)} e^{itx}\, dx = e^{-|t|}$$

e quindi la funzione caratteristica di y:

$$\phi_y(t) = \Big(\phi_x(t)\Big)^N = e^{-N|t|} \, .$$

Passando da $\phi_y(t)$ a $P_N(y)$:

$$P_N(y) = \frac{1}{2\pi} \int \phi_y(t) e^{-ity}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int e^{-N|t|} e^{-itx}\, dt\,,$$

con un calcolo elementare si ottiene

$$P_N(y) = \frac{N}{\pi(y^2 + N^2)}\,.$$

Ovviamente si può arrivare alla stesso risultato anche senza passare per le funzioni caratteristiche, notando che $P_N(y)$ e' una convoluzione multipla:

$$P_2(y) = (P * P)(y)\ ,\ P_3(y) = (P_2 * P)(y) = (P * P * P)(y)\ , ... \ .$$

usando le trasformate di Fourier, che sono collegate alle funzioni caratteristiche in modo ovvio:

$$\hat{P}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \phi_x(-k)\,,$$

ed i teorema di convoluzione

$$\hat{P}_N(k) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{N-1} \left(\hat{P}(k)\right)^N\ ,\ P_N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{iky} \hat{P}_N(k)\, dk$$