Esame 9 Settembre 2022

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2021-2022

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
9 Settembre 2022

NOTA: $\boxed{\textbf{GLI ESERCIZI VANNO CONSEGNATI SU 2 FOGLI DISTINTI}}$

$\boxed{\textbf{Es.1 e Es.2 su uno}}$ $\longleftrightarrow$ $\boxed{\textbf{Es.3 e Es.4 sull'altro}}$

SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA. Esempio "D. Hilbert, 23011862."

Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (9 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{\sinh(x)} dx \,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (6 pt)
Studiare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = \frac{z}{(z-8)^2\sqrt{z^2-1}} \tag{2}$$

e calcolare l'integrale

$$\int_\gamma f(z)\, dz \,, \tag{3}$$

dove $\gamma = 7 + 2e^{it}$, con $0 \le t < 2\pi$.

Esercizio 3 (6 pt)
Si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{A}\,\mathbf{x} \tag{4}$$

ove $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ e

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \,, \tag{5}$$

trovare i valori di a, b e c reali tali che

$$|\mathbf{x}(t)|^2 = |\mathbf{x}(0)|^2 \,. \tag{6}$$

Esercizio 4 (9 pt)
Trovare la $f(x,t)$ soluzione dell'equazione

$$\partial_t f(x,t) = -\partial_x f(x,t) - f(x,t) + \delta(t^2+t)\Big(\sin 2x + 2\cos 3x - \sin 5x + 1\Big) \tag{7}$$

con $-\pi < x < \pi$, condizioni periodiche al bordo per f e $\partial f/\partial x$, e condizione iniziale $f(x,-1/2) = 0$.

Soluzione Es. 1

L'integrale è la parte immaginaria di

$$I = \Im I' = \Im PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\sinh x} dx \,. \tag{8}$$

Per calcolare I' consideriamo

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{\sinh{(z)}} \,, \tag{9}$$

funzione analitica in $\mathbb{C}$ tranne nei punti in cui si annulla il denominatore, ovvero

$$z = k\pi i \,, \tag{10}$$

con $k \in \mathbb{Z}$, che sono dei poli semplici.

Consideriamo il cammino $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6 + \gamma_7 + \gamma_8$ come segue

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= x \,, \qquad \epsilon \leq x \leq R \,, & (11)\\
\gamma_2 &= R + iy \,, \qquad 0 \leq y \leq \pi \,, & (12)\\
\gamma_3 &= x + i\pi \,, \qquad R \geq x \geq \epsilon \,, & (13)\\
\gamma_4 &= x + i\pi \,, \qquad -\epsilon \geq x \geq -R \,, & (14)\\
\gamma_5 &= -R + iy \,, \qquad \pi \geq y \geq 0 \,, & (15)\\
\gamma_6 &= x \,, \qquad -R \leq x \leq -\epsilon \,, & (16)\\
\gamma_7 &= \pi i + \epsilon e^{it} \,, \qquad -\pi \leq t \leq 0 & (17)\\
\gamma_8 &= \epsilon e^{it} \,, \qquad \pi \leq t \leq 0 \,. & (18)
\end{aligned}$$

La $f(z)$ non ha singolarità interne a γ, quindi per il teorema di Cauchy si ha

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0 \,. \tag{19}$$

Inoltre

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \int_\gamma f(z)\, dz = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \sum_{i=1}^{8} \int_{\gamma_i} f(z)\, dz \,, \tag{20}$$

dove

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{R\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \int_{\gamma_6+\gamma_1} f(z)\, dz &= I' & (21)\\
\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\, dz &= \int_0^\pi \frac{2e^{iR-y}}{e^{R+iy} - e^{-R-iy}}\, i\, dy \to 0 & (22)\\
\lim_{\substack{R\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \int_{\gamma_3+\gamma_4} f(z)\, dz &= e^{-\pi} PV \int_R^{-R} \frac{2e^{ix}}{e^{x+i\pi} - e^{-x-i\pi}} dx = e^{-\pi} I' & (23)\\
\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_5} f(z)\, dz &= \int_\pi^0 \frac{2e^{-iR-y}}{e^{R-iy} - e^{-R+iy}}\, i\, dy \to 0 & (24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_8} f(z)\,dz &= -i\pi\,\mathrm{Res}\,(f,0) && (25)\\
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_7} f(z)\,dz &= -i\pi\,\mathrm{Res}\,(f,i\pi)\ . && (26)
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo

$$(1+e^{-\pi})\,I' = i\pi\left[\mathrm{Res}\,(f,0)+\mathrm{Res}\,(f,i\pi)\right]\ . \qquad (27)$$

Calcoliamo i residui:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\,(f,0) &= 1\,, && (28)\\
\mathrm{Res}\,(f,i\pi) &= -e^{-\pi}\,. && (29)
\end{aligned}$$

In totale:

$$I' = i\pi\,\frac{1-e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}} = i\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad (30)$$

Quindi

$$I = \pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right). \qquad (31)$$

Soluzione Es. 2

La funzione $f(z)$ ha un polo doppio nel punto $z=8$, due punti di diramazione $z=\pm 1$. Per quanto riguarda il punto all'infinito, abbiamo

$$f\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{\omega^2}{(1-8\omega)^2\sqrt{1-\omega^2}}\,. \qquad (32)$$

Quindi il punto all'infinito è un punto regolare per la funzione (zero di ordine 2).

Poniamo il taglio sul segmento dell'asse reale che unisce i due punti di diramazione. Notiamo che la circonferenza su cui dobbiamo integrare include il polo $z=8$, ma esclude il taglio dovuto alla radice. In quella regione la radice è analitica. Possiamo utilizzare allora il teorema dei residui (oppure la formula integrale di Cauchy per la derivata) per avere

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,(f,8) = 2\pi i\ \frac{d}{dz}\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\bigg|_{z=8} = -\frac{2}{189\sqrt{7}}\pi i\,. \qquad (33)$$

Soluzione Es. 3

Per avere $|\mathbf{x}(t)|^2 = |\mathbf{x}(0)|^2$ la matrice

$$e^{t\mathcal{A}}$$

deve essere unitaria, questo è possibile solo se gli autovalori $\lambda_{1,2}$ della matrice $\mathcal{A}$ sono immaginari puri:

$$(a-\lambda)^2 - bc = 0 \quad\to\quad \lambda = a\pm\sqrt{bc}$$

quindi la condizione cercata è:

$$a=0\ ,\ \ bc<0\,.$$

Soluzione Es. 4

Usando le proprietà della delta di Dirac si ha

$$\delta(t^2+t) = \delta(t+1) + \delta(t)\,,$$

e integrando l'equazione tra $-\epsilon$ ed ϵ si ha

$$f(x,\epsilon) = \sin 2x + 2\cos 3x - \sin 5x + 1$$

quindi per $t > 0$ si ha l'equazione

$$\partial_t f(x,t) = -\partial_x f(x,t) - f(x,t) \tag{1}$$

con condizione iniziale

$$f(x,0) = \sin 2x + 2\cos 3x - \sin 5x + 1\ .$$

Sviluppando in serie di Fourier complessa si ha

$$f(x,t) = \sum_n f_n(t) e^{inx}$$

$$\frac{d}{dt} f_n = -(in+1) f_n \ \rightarrow\ f_n(t) = f_n(0) e^{-(in+1)t}\ .$$

Quindi

$$f(x,t) = \sum_n f_n(0) e^{in(x-t)} e^{-t}\,, \tag{2}$$

dalla condizione iniziale gli unici n coinvolti sono $n = 0, \pm 2, \pm 3$ e ± 5, con calcoli elementari, usando la condizione iniziale, si ha

$$f(x,t) = \Big(\sin 2(x-t) + 2\cos 3(x-t) - \sin 5(x-t) + 1\Big) e^{-t}\ .$$

Notare che la soluzione ha la forma

$$f(x,t) = f(x-t,0) e^{-t}\ ,$$

cosa che si può ricavare semplicemente guardando la (2):

$$f(x,t) = \Big(\sum_n f_n(0) e^{in(x-t)}\Big) e^{-t} = f(x-t,0) e^{-t}$$

oppure direttamente dalla forma dell'equazione.
Si può anche usare la serie di Fourier reale, i calcoli sono simili ed ovviamente si ottiene lo stesso risultato.