Esame 9 Novembre 2022

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2021-2022

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
9 Novembre 2022

NOTA: $\boxed{\textbf{GLI ESERCIZI VANNO CONSEGNATI SU 2 FOGLI DISTINTI}}$

$\boxed{\textbf{Es.1 e Es.2 su uno}} \longleftrightarrow \boxed{\textbf{Es.3 e Es.4 sull'altro}}$

SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA. Esempio "D. Hilbert, 23011862."

Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (9 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_a^\infty \frac{\sqrt{x-a}}{x^2+2} dx\,, \quad a \in \mathbb{R}^+\,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (6 pt)
Studiare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = \frac{\log(z^2+3)}{(z-1)^2}\,. \tag{2}$$

Calcolare l'integrale $\int_\gamma f(z)\,dz$, dove $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t < 2\pi$. Ponendo i tagli sull'asse complesso, dire quanto vale la $f(z)$ in $z = 4i$.

Esercizio 3 (5 pt)
Si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{A}\,\mathbf{x}$$

ove $\mathbf{x} \in R^3$ e

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & a \end{pmatrix}\,,$$

trovare i valori di a, b, c e d (reali) tali che

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0.$$

per ogni condizione iniziale.

Esercizio 4 (10 pt)
Si consideri l'operatore lineare $\mathcal{A}$

$$\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} \ , \ \ y_n = \sum_j A_{nj} x_j$$

ove

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, ..., x_{N-1}) \ , \ \mathbf{y} = (y_0, y_1, ..., y_{N-1}) \quad , \quad x_n \in C \ , \ y_n \in C \ ,$$

e

$$A_{nj} = a e^{ibnj} \ .$$

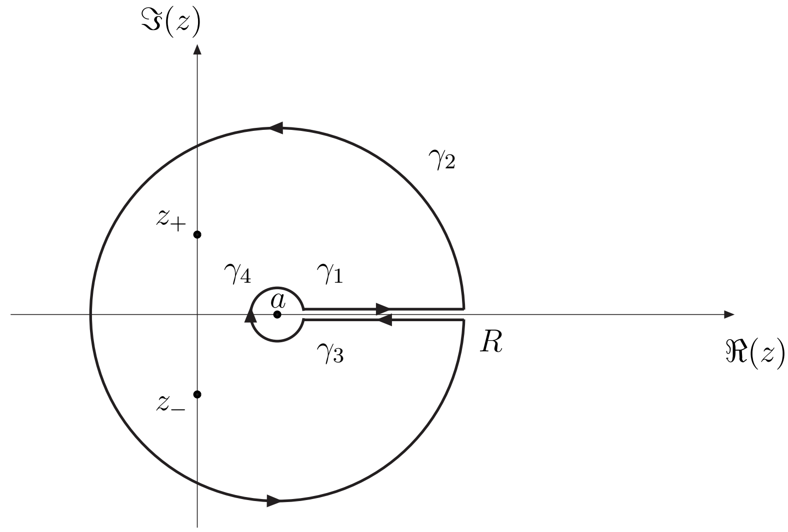
Determinare i valori di a e b (reali) tali che l'operatore $\mathcal{A}$ sia unitario.

Soluzione Es. 1

Per risolvere I consideriamo

$$f(z) = \frac{\sqrt{z-a}}{z^2+2} = \frac{e^{\frac{1}{2}\log(z-a)}}{z^2+2}\,, \tag{3}$$

funzione polidroma, con due poli singoli al finito in $z = z_+$ e $z = z_-$, con $z_\pm = \pm\sqrt{2}i$, e due punti di diramazione, in $z = a$ e nel punto all'infinito. Fissiamo il taglio della radice sull'asse reale, fra $z = a$ e l'infinito. Consideriamo inoltre l'integrale su una curva chiusa $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, come in figura (ovvero sfruttiamo il taglio per fare l'integrale):



Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{R\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz &= I\,, && (4)\\
\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz &= 0\,, && (5)\\
\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_4} f(z)\,dz &= 0\,, && (6)\\
\lim_{\substack{R\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \int_{\gamma_3} f(z)\,dz &= I\,. && (7)
\end{aligned}$$

Quindi, per il teorema dei residui

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\,I = 2\pi i\,\left(\mathrm{Res}(f,z_+) + \mathrm{Res}(f,z_-)\right)\,. \tag{8}$$

Per il calcolo dei residui si ha

$$\mathrm{Res}(f,z_+) = \lim_{z\to\sqrt{2}i}(z-\sqrt{2}i)f(z) = -i\frac{\lim_{z\to\sqrt{2}i}\sqrt{z-a}}{2\sqrt{2}}\,, \tag{9}$$

$$\mathrm{Res}(f,z_-) \;=\; \lim_{z\to-\sqrt{2}i}(z+\sqrt{2}i)f(z) = i\frac{\lim_{z\to-\sqrt{2}i}\sqrt{z-a}}{2\sqrt{2}}\,, \tag{10}$$

dove però bisogna stare attenti al fatto che il taglio lo abbiamo messo sull'asse reale positivo. Quindi, ponendo

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{a}\right), \tag{11}$$

si deve avere

$$\sqrt{2}i-a \;=\; \sqrt{2+a^2}e^{i(\pi-\alpha)}\,, \tag{12}$$
$$-\sqrt{2}i-a \;=\; \sqrt{2+a^2}e^{i(\pi+\alpha)}\,, \tag{13}$$

ovvero

$$\sqrt{\sqrt{2}i-a} \;=\; \sqrt[4]{2+a^2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)} = i\sqrt[4]{2+a^2}e^{-i\frac{\alpha}{2}}\,, \tag{14}$$
$$\sqrt{-\sqrt{2}i-a} \;=\; \sqrt[4]{2+a^2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)} = i\sqrt[4]{2+a^2}e^{i\frac{\alpha}{2}}\,. \tag{15}$$

I due numeri hanno la stessa parte immaginaria e parti reali opposte.

In totale quindi si ha:

$$I = \pi\sqrt[4]{\frac{2+a^2}{4}}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right), \tag{16}$$

reale, come deve essere.

Soluzione Es. 2

La funzione $f(z)$ è una funzione polidroma (a causa del logaritmo). Prendendo il ramo principale del logaritmo con l'usuale taglio sul semiasse reale negativo, si trova per $f(z)$ che

$$z^2+3 \neq -t\,, \quad t\in\mathbb{R}^+\,, \tag{17}$$

ovvero due tagli dati da

$$z \neq \pm i\sqrt{3+t}\,, \quad t\in\mathbb{R}^+\,, \tag{18}$$

con due punti di diramazione in $z=\pm i\sqrt{3}$. Consistentemente, il punto all'infinito è un punto di diramazione doppio ($\log(\omega^2)$ per $\omega\to 0$). Quindi poniamo i tagli della $f(z)$ da $z=i\sqrt{3}$ all'infinito lungo il semiasse immaginario positivo e da $z=-i\sqrt{3}$ all'infinito lungo il semiasse immaginario negativo (per nessun motivo si può scegliere un taglio al finito che unisca i due punti di diramazione al finito: Il punto all'infinito è un punto di diramazione doppio).

Oltre ai punti di diramazione, la $f(z)$ ha un polo doppio al finito, in $z=1$.

L'integrale è tale che la curva in realtà interseca il taglio. Quindi non si può utilizzare il teorema dei residui (bisognerebbe spezzare la circonferenza in due semi-circonferenze e andare a valutare la primitiva sui tagli). Se il raggio della circonferenza fosse stato $R=\frac{3}{2}$, avremmo potuto applicare il teorema dei residui, trovando

$$\int_{\gamma=\frac{3}{2}e^{it}} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,(f,1)\;, \tag{19}$$

dove

$$\mathrm{Res}\,(f,1) = \frac{1}{2}\,. \tag{20}$$

Per quanto riguarda il valore di $f(z)$ in $z = 4i$, siccome siamo sul taglio dobbiamo distinguere se andiamo su $4i$ da destra oppure da sinistra.

Se arriviamo sul taglio da destra avremo

$$\lim_{\epsilon\to 0} f(4i+\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\log(-16+i\epsilon)}{(4i-1)^2} = \frac{\log(16)+i\pi}{(4i-1)^2}\,, \tag{21}$$

mentre se arriviamo sul taglio da sinistra avremo

$$\lim_{\epsilon\to 0} f(4i-\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\log(-16-i\epsilon)}{(4i-1)^2} = \frac{\log(16)-i\pi}{(4i-1)^2}\,. \tag{22}$$

Soluzione Es. 3

Per avere

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0.$$

per ogni condizione iniziale, tutti gli autovalori della matrice $\mathcal{A}$ devono avere parte reale negativa. Gli autovalori sono

$$c\ ,\ \ a-\sqrt{bd}\ ,\ \ a+\sqrt{bd}\ .$$

Quindi si deve avere $c < 0$.
Per quanto riguarda a, b e d ci sono 2 possibili situazioni:
• se $bd < 0$ si hanno autovalori complessi, in questo caso si deve richiedere $a < 0$
• se $bd > 0$ gli autovalori sono reali, in questo caso si deve richiedere $a < -\sqrt{bd}$, se vale questa condizione sicuramente anche $a - \sqrt{bd} < 0$

Soluzione Es. 4

L'operatore $\mathcal{A}$ e' unitario se

$$\mathcal{A}\,\mathcal{A}^* = \mathcal{I}$$

in forma esplicita

$$\sum_k A_{nk}(A^*)_{kn'} = \delta_{nn'}$$

ove

$$(A^*)_{kn'} = ae^{-ibkn'}\,,$$

Quindi si deve avere

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^2 e^{ibk(n-n')} = \sum_{k=0}^{N-1} a^2\left(e^{ib(n-n')}\right)^k = \delta_{nn'}\,, \tag{1}$$

per $n = n'$, la condizione (1) vale se

$$a = \frac{1}{\sqrt{N}} \, .$$

Nel caso $n \neq n'$, ricordando l'identita'

$$\sum_{k=0}^{N-1} x^k = \frac{1 - x^N}{1 - x} \ , \ x \neq 1$$

con $x = e^{ib(n-n')}$, la (1) e' soddisfatta se

$$b = \frac{2\pi}{N} \, ,$$

infatti con questo valore di b, per ogni $n - n'$ intero non nullo si ha

$$e^{ibN(n-n')} = e^{i2\pi(n-n')} = 1 \, .$$

Per questi valori di a e b l'operatore $\mathcal{A}$ non e' altro che la trasformata di Fourier discreta.