Esame 16 Giugno 2020

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2019-2020

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
16 Giugno 2020 – Gruppo A

Esercizio 1 (10 pt)
Calcolare, con tecniche di analisi complessa, il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos(2x) - 1}{x^2 + 1}\, dx\,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (5 pt)
Discutere il comportamento nel punto all'infinito della seguente funzione:

$$f(z) = z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right) \tag{2}$$

e calcolarne il residuo all'infinito.

Esercizio 3 (10 pt)
Data l'equazione

$$\partial_t f(x,t) = \partial^4_{xxxx} f(x,t) - \alpha\theta(t-1) f(x,t) \tag{3}$$

con $f(0,t) = f(\pi,t) = 0$, per ognuna delle seguenti condizioni iniziali:

1. $f(x,0) = 4\sin 4x - 5\sin 18x$,
2. $f(x,0) = \sin 11x + \sin 23x$,
3. $f(x,0) = x(\pi - x)$,

dire per quali valori di α la soluzione non diverge per $t \to \infty$.

Esercizio 4 (5 pt)
Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a & b \\ b & a & a \\ b & b & b \end{pmatrix} \tag{4}$$

dire per quali valori di a e b è

1. autoaggiunta;
2. un proiettore.

Soluzione Es. 1

L'integrale è perfettamente definito e reale. Per calcolarlo notiamo che l'integrando è pari e quindi riesprimiamo l'integrale come segue

$$\int_0^\infty \frac{\cos(2x)-1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(2x)-1}{x^2+1}dx\,. \tag{5}$$

Consideriamo la seguente funzione

$$f(z) = \frac{e^{i2z}-1}{z^2+1}\,, \tag{6}$$

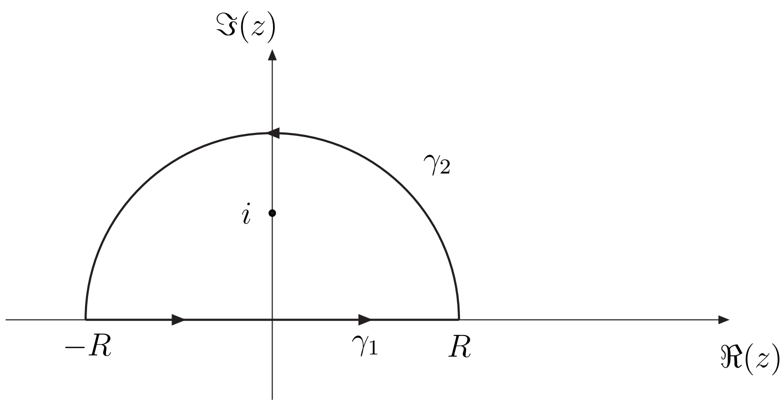
che sull'asse reale si riduce a

$$f(x) = \frac{\cos(2x)-1}{x^2+1} + i\,\frac{\sin(2x)}{x^2+1}\,. \tag{7}$$

$f(z)$ è analitica ovunque tranne nei due poli singoli

$$z = \pm i\,. \tag{8}$$

Consideriamo il cammino in figura.



Facendo l'integrale su $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, si può applicare il teorema dei residui:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,(f,i) = \pi\,\left(e^{-2}-1\right)\,. \tag{9}$$

Per l'integrale su Γ si ha:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(2x)-1}{x^2+1}dx + i\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(2x)}{x^2+1}\,dx\,. \tag{10}$$

Da notare che essendo il secondo integrando dispari, il secondo integrale è nullo (lo si vede anche dal teorema dei residui, come specificheremo sotto).

L'integrale sulla semicirconferenza si annulla. Infatti, considerando che il $\sin\theta > 0$ se $0 < \theta < \pi$, si ha

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{e^{2iR(\cos\theta + i\sin\theta)} - 1}{R^2 e^{2i\theta} + 1} iRe^{i\theta}\, d\theta = 0\,, \tag{11}$$

(per il lemma di Jordan il primo pezzetto, mentre il secondo semplicemente va come $1/R$ per $R \to \infty$).

In totale si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2+1} dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2+1}\, dx = \pi\left(e^{-2} - 1\right)\,, \tag{12}$$

ovvero

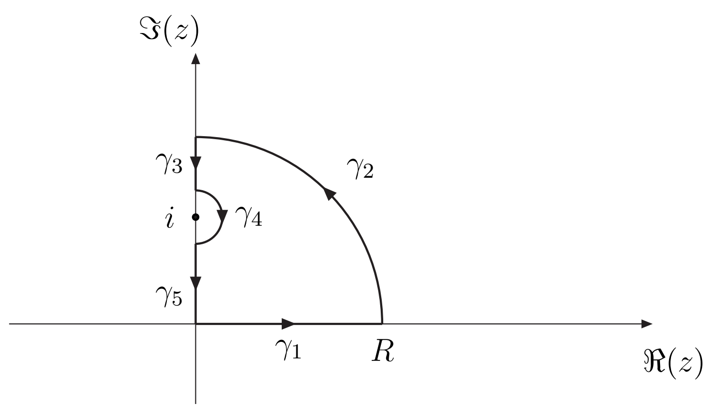
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2+1} dx \;=\; \pi\left(e^{-2} - 1\right)\,, \tag{13}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2+1}\, dx \;=\; 0\,. \tag{14}$$

Tornando al nostro integrale, si trova quindi

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2+1} dx \;=\; \frac{\pi}{2}\left(e^{-2} - 1\right)\,. \tag{15}$$

Alternativamente, possiamo considerare l'integrale della $f(z)$ sul cammino in figura.



Facendo l'integrale su $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5$, si può applicare il teorema dei residui:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0\,. \tag{16}$$

Prendendo i limiti $\lim_{R\to\infty}$ e $\lim_{r\to 0}$ si ha, quindi:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)dz \;=\; \int_0^{\infty} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2+1} dx + i\int_0^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2+1} dx\,, \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)dz &= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2iR(\cos\theta+i\sin\theta)}-1}{R^2e^{2i\theta}+1} iRe^{i\theta}\,d\theta = 0\,, && (18)\\
\lim_{R\to\infty, r\to 0}\int_{\gamma_3+\gamma_5} f(z)dz &= -PV\int_0^{\infty}\frac{e^{-2y}-1}{1-y^2}\,i\,dy\,, && (19)\\
\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_4} f(z)dz &= -\pi i\mathrm{Res}(f,i) = -\frac{\pi}{2}(e^{-2}-1)\,, && (20)
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il lemma degli archi infinitesimi nell'ultimo integrale.

Quindi, in totale abbiamo

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos{(2x)}-1}{x^2+1}dx + i\int_0^{\infty}\frac{\sin{(2x)}}{x^2+1}dx\ - i\,PV\int_0^{\infty}\frac{e^{-2y}-1}{1-y^2}\,dy - \frac{\pi}{2}(e^{-2}-1) = 0\,, \quad (21)$$

ovvero, prendendo la parte reale della precedente relazione

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos{(2x)}-1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}(e^{-2}-1)\,. \quad (22)$$

Soluzione Es. 2

Studiamo la funzione nel punto all'infinito. Mandando

$$z \to \frac{1}{w}\,, \quad (23)$$

si ha

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^3}\cos{(w)}\,, \quad (24)$$

che per $w \to 0$ diventa

$$f\left(\frac{1}{w}\right) \simeq \frac{1}{w^3}\left(1-\frac{w^2}{2}+...\right)\,, \quad (25)$$

cioè la funzione $f(z)$ è singolare nel punto all'infinito, dove ha un polo triplo.

Il residuo all'infinito è dato dal residuo in zero della funzione

$$-\frac{1}{w^2}f\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{1}{w^5}\cos{(w)}\,. \quad (26)$$

Quindi, siccome

$$-\frac{1}{w^2}f\left(\frac{1}{w}\right) \simeq -\frac{1}{w^5}\left(1-\frac{w^2}{2}+\frac{w^4}{24}+...\right) = -\frac{1}{w^5}+\frac{1}{2w^3}-\frac{1}{24w}+... \quad (27)$$

infine si ha

$$\mathrm{Res}\left(-\frac{1}{w^2}f\left(\frac{1}{w}\right),0\right) = -\frac{1}{24}\,. \quad (28)$$

Soluzione Es. 3

1. $a = b$ reali.
2. $a = b = 1/3$.

Soluzione Es. 4

Date le condizioni al bordo si può sviluppare in serie di seni

$$f(x,t) = \sum_n b_n(t) \sin nx$$

sostituendo nell'equazione

$$\frac{d}{dt} b_n(t) = \Big(n^4 - \alpha\theta(t-1)\Big) b_n(t)$$

che può essere facilmente risolta, ovviamene eventuali problemi si hanno solo per $t > 1$, quindi per non avere divergenza si deve avere che per tutti gli n coinvolti $n^4 - \alpha$ deve essere non positivo, quindi

$$\alpha \geq n_M^4$$

ove n_M è il valore massimo di n nella condizione iniziale, quindi
a) $\alpha \geq 18^4$
b) $\alpha \geq 23^4$
c) poiché nello sviluppo si ha una somma infinita nessun valore di α soddisfa la richiesta