Esame 16 Giugno 2020

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2019-2020

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
16 Giugno 2020 – Gruppo B

Esercizio 1 (10 pt)
Calcolare, con tecniche di analisi complessa, il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos(2x)-1}{x^2}\,dx\,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (5 pt)
Discutere il comportamento nel punto all'infinito della seguente funzione:

$$f(z) = z^4 \sin\left(\frac{1}{z}\right) \tag{2}$$

e calcolarne il residuo all'infinito.

Esercizio 3 (10 pt)
Data l'equazioni

$$\partial_t f(x,t) = \partial^2_{xx} f(x,t) + \delta(t^2-1)(\sin 3x - 2\sin 2x) \tag{3}$$

con $f(0,t) = f(\pi,t) = 0$ e condizioni iniziali:

$$f(x.0) = 4\sin 4x - 5\sin 2x \tag{4}$$

trovare la soluzione $f(x,t)$.

Esercizio 4 (5 pt)
Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & a \\ 0 & c & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \tag{5}$$

dire per quali valori di a, b e c è

1. autoaggiunta;
2. un proiettore.

Soluzione Es. 1

L'integrale è perfettamente definito e reale. Per calcolarlo notiamo che l'integrando è pari e quindi riesprimiamo l'integrale come segue

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} dx \,. \tag{6}$$

Consideriamo la seguente funzione

$$f(z) = \frac{e^{i2z} - 1}{z^2} \,, \tag{7}$$

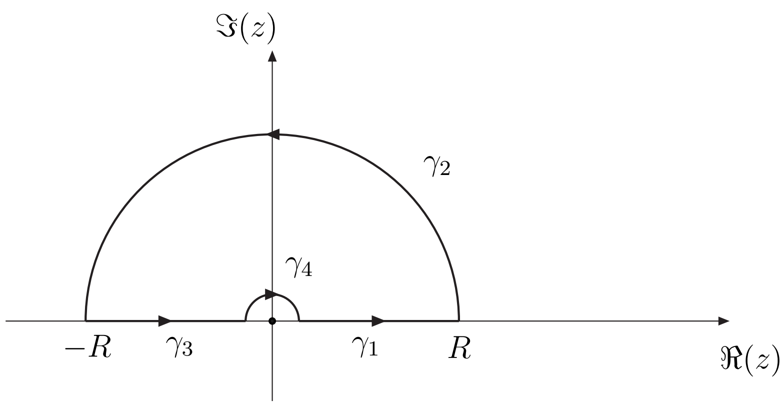
che sull'asse reale si riduce a

$$f(x) = \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} + i\,\frac{\sin(2x)}{x^2} \,. \tag{8}$$

$f(z)$ è analitica ovunque tranne nel polo singolo

$$z = 0 \,. \tag{9}$$

Consideriamo il cammino in figura.



Facendo l'integrale su $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, si può applicare il teorema dei residui:

$$\int_\Gamma f(z) dz = 0 \,. \tag{10}$$

Per l'integrale su Γ si ha:

$$\lim_{R\to\infty, r\to 0} \int_{\gamma_3+\gamma_1} f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} dx + iPV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2}\, dx \,. \tag{11}$$

L'integrale sulla semicirconferenza di raggio R si annulla. Infatti, considerando che il $\sin\theta > 0$ se $0 < \theta < \pi$, si ha

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{2iR(\cos\theta + i\sin\theta)} - 1}{R^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta}\, d\theta = 0 \,, \tag{12}$$

(per il lemma di Jordan il primo pezzetto, mentre il secondo semplicemente va come $1/R$ per $R \to \infty$).

L'ultimo contributo si ottiene col lemma degli archi infinitesimi:

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_4} f(z)\,dz = -\pi i \mathrm{Res}\,(f,0) = 2\pi\,. \tag{13}$$

In totale si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)-1}{x^2}dx + iPV\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2}\,dx = -2\pi\,, \tag{14}$$

ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)-1}{x^2}dx \;=\; -2\pi\,, \tag{15}$$

$$PV\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2}\,dx \;=\; 0\,. \tag{16}$$

Tornando al nostro integrale, si trova quindi

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(2x)-1}{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)-1}{x^2}dx = -\pi\,. \tag{17}$$

Soluzione Es. 2

Studiamo la funzione nel punto all'infinito. Mandando

$$z \to \frac{1}{w}\,, \tag{18}$$

si ha

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^4}\sin(w)\,, \tag{19}$$

che per $w \to 0$ diventa

$$f\left(\frac{1}{w}\right) \simeq \frac{1}{w^4}\left(w - \frac{w^3}{6} + ...\right)\,, \tag{20}$$

cioè la funzione $f(z)$ è singolare nel punto all'infinito, dove ha un polo triplo.

Il residuo all'infinito è dato dal residuo in zero della funzione

$$-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{1}{w^6}\sin(w)\,. \tag{21}$$

Quindi, siccome

$$-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) \simeq -\frac{1}{w^6}\left(w - \frac{w^3}{6} + \frac{w^5}{120}...\right) = -\frac{1}{w^5} + \frac{1}{6w^3} - \frac{1}{120w}... \tag{22}$$

infine si ha

$$\mathrm{Res}\left(-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right) = -\frac{1}{120}\,. \tag{23}$$

Soluzione Es. 3

1. a e c reali, $b = 0$.
2. $b = 0$, $c = 1$ e $a = 1/2$.

Soluzione Es. 4

Date le condizioni al bordo si può sviluppare in serie di seni

$$f(x,t) = \sum_n b_n(t) \sin nx$$

sostituendo nell'equazione

$$\frac{d}{dt} b_n(t) = -n^2 b_n(t) + \delta(t^2 - 1)(\delta_{n,3} - 2\delta_{n,2})$$

Per $n \neq 3$ e $n \neq 2$ si ha

$$b_n(t) = b_n(0) e^{-n^2 t}$$

poiché ci interessano solo $t > 0$ abbiamo

$$\frac{d}{dt} b_3(t) = -9 b_3(t) + \frac{1}{2}\delta(t-1)$$

$$\frac{d}{dt} b_2(t) = -4 b_2(t) - \delta(t-1)$$

date le condizioni iniziale e la forzante basta considerare solo $n = 2, 3$ e $n = 4$, per $t < 1$:

$$b_2(t) = -5e^{-4t} \ \ , \ \ b_3(t) = 0 \ \ e \ \ b_4(t) = 4e^{-16t} \, .$$

Per $t > 1$ si ha

$$b_2(t) = -5e^{-4t} - \int_1^t e^{-4(t-t')} \delta(t'-1) dt' = -5e^{-4t} - e^{-4(t-1)}$$

$$b_3(t) = \frac{1}{2} \int_1^t e^{-9(t-t')} \delta(t'-1) dt' = \frac{1}{2} e^{-9(t-1)}$$

$$b_4(t) = 4e^{-16t} \, .$$

quindi

$$f(x,t) = b_2(t) \sin 2x + b_3(t) \sin 3x + b_4(t) \sin 4x.$$