Esame 22 Giugno 2021

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2020-2021

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
22 Giugno 2021

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es.1 e 2 su uno ed Es.3 e 4 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (10 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{2e^x + 3e^{-x}} dx \,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (5 pt)
Sviluppare in serie di Laurent la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 5z + 4)} \tag{2}$$

nelle regioni $1 < |z| < 4$ e $|z| > 4$.

Esercizio 3 (5 pt)
Data la matrice $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 2b & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \tag{3}$$

dire per quali valori di a, b, c, d, e ed f la matrice

$$\mathcal{B} = e^{\mathcal{A}} \tag{4}$$

è unitaria.

Esercizio 4 (10 pt)
Trovare la $f(x,t)$ soluzione dell'equazione

$$\partial_t f(x,t) = e^{-t} \partial^2_{xx} f(x,t) - F(t) f(x,t) \tag{5}$$

con

$$F(t) = \frac{1}{t^\alpha} \Theta(t - 0.8) \delta(\sin \pi t) \tag{6}$$

ove $\Theta(z)$ indica la funzione gradino che vale 0 se $z < 0$ e vale 1 se $z > 0$, e condizione iniziale $f(x,0) = \delta(x-2)$. Determinare

$$\lim_{t \to \infty} f(x,t) \tag{7}$$

per $\alpha > 0$. Lasciare indicate sommatorie il cui valore numerico non è facile da trovare.

Soluzione Es. 1

Consideriamo la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z}{2e^z + 3e^{-z}} \,. \tag{8}$$

La $f(z)$ ha delle singolarità nel piano complesso, là dove si annulla il denominatore

$$2e^z + 3e^{-z} = 0 \,, \tag{9}$$

ovvero in

$$z = z_k = \frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right) + i\frac{\pi}{2} + i\pi k \,, \tag{10}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Possiamo risolvere l'integrale reale di partenza andando a sfruttare il teorema dei residui e integrando la $f(z)$ sul seguente percorso:

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \,, \tag{11}$$

dove $\gamma_1 = x$ con $-b < x < b$, $\gamma_2 = b + iy$ con $0 < y < \pi$, $\gamma_3 = x + i\pi$ con $b > x > -b$, $\gamma_4 = -b + iy$ con $\pi > y > 0$ e poi prendendo il limite $b \to \infty$.

Si ha

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\,(f(z), z_0) = 2\pi i \left(\frac{\pi}{4\sqrt{6}} - i\frac{1}{4\sqrt{6}}\log\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\log\left(\frac{3}{2}\right) + i\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}} \,. \tag{12}$$

Le integrazioni sui singoli cammini danno:

$$\lim_{b\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{2e^x + 3e^{-x}}dx = I \,, \tag{13}$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z) = \int_0^{\pi}\frac{b+iy}{2e^{b+iy} + 3e^{-b-iy}}i\,dy \to 0 \,, \tag{14}$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_{\gamma_3} f(z) = \int_{\infty}^{-\infty}\frac{x+i\pi}{2e^{x+i\pi} + 3e^{-x-i\pi}}dx = I + i\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2e^x + 3e^{-x}}dx \,, \tag{15}$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_{\gamma_4} f(z) = \int_{\pi}^{0}\frac{-b+iy}{2e^{-b+iy} + 3e^{b-iy}}i\,dy \to 0 \,. \tag{16}$$

In totale, quindi, abbiamo

$$2I + i\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2e^x + 3e^{-x}}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\log\left(\frac{3}{2}\right) + i\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}} \,, \tag{17}$$

ovvero

$$I = \frac{\pi}{4\sqrt{6}}\log\left(\frac{3}{2}\right) \,, \tag{18}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2e^x + 3e^{-x}} = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \,. \tag{19}$$

Soluzione Es. 2

Abbiamo

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-4)} = \frac{1}{3(z-4)} - \frac{1}{3(z-1)}\,, \tag{20}$$

che è analitica in $\mathbb{C}$ escluso i punti $z = 1$ e $z = 4$. Per trovare l'espressione della $f(z)$ in serie di Laurent fra la prima e la seconda singolarità notiamo che se $1 < |z| < 4$ si può scrivere

$$\frac{1}{3(z-4)} = -\frac{1}{12(1-z/4)} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}} \tag{21}$$

e

$$\frac{1}{3(z-1)} = \frac{1}{3z(1-1/z)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}\,, \tag{22}$$

quindi

$$f(z) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}} = -\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k}\right)\,, \tag{23}$$

dove nella prima sommatoria abbiamo riscalato l'indice di somma con $k = n + 1$.

Nella seconda regione invece si ha $|z| > 4$, per cui

$$\frac{1}{3(z-4)} = \frac{1}{3z(1-4/z)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^{n+1}} \tag{24}$$

mentre l'altra serie rimane la stessa in forma. Quindi

$$f(z) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} 4^n\, z^{-n-1} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(4^n-1)\, z^{-n-1} \sim \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \dots. \tag{25}$$

È da notare che la $f(z)$ ha uno zero doppio nel punto all'infinito e quindi la sua serie di Laurent nella regione $|z| > 4$ contiene solo la parte principale che giustamente comincia con $1/z^2$.

Soluzione Es. 3

$\mathcal{B}$ è unitaria se è della forma

$$\mathcal{B} = e^{i\mathcal{C}} \tag{26}$$

ove $\mathcal{C}$ è autoaggiunta

$$i\mathcal{C} = \mathcal{A}\ ,\ \ \mathcal{C} = -i\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -ia & -ib & 0 \\ -2ib & -ic & -id \\ 0 & -ie & -if \end{pmatrix} \tag{27}$$

quindi si deve avere a, c, f immaginari, $b = 0$, $d = e$ immaginari.

Soluzione Es. 4

Passando in trasformata di Fuorier si ha

$$\frac{d}{dt}\hat{f}(k,t) = \Big(- k^2 e^{-t} - F(t)\Big)\hat{f}(k,t) \tag{28}$$

che si risolve facilmente:

$$\hat{f}(k,t) = e^{-H(t)} e^{-G(t)k^2}\hat{f}(k,0) \tag{29}$$

ove

$$G(t) = \int_0^t e^{-t'}\,dt' = 1 - e^{-t} \ \ , \ \ H(t) = \int_0^t F(t')\,dt' \tag{30}$$

ricordando le proprieta' della $\Theta(\,)$ e della delta di Dirac, si ha $H(t) = 0$ per $t < 1$, mentre per $t > 1$ si ha

$$F(t) = \frac{1}{\pi t^\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\delta(t-n) \ \ , \ \ H(t) = \sum_{n=1}^{N(t)}\frac{1}{\pi n^\alpha} \tag{31}$$

ove $N(t)$ e' la parte intera di t: cioe' 1 se $1 < t < 2$; 2 se $2 < t < 3$ etc.

Si ha quindi

$$\begin{aligned} f(x,t) &= e^{-H(t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-G(t)k^2}\hat{f}(k,0)e^{ikx}\,dk\,, & (32)\\ &= e^{-H(t)}\frac{1}{2\pi}\int\int e^{-G(t)k^2} f(x',0)e^{ik(x-x')}\,dk\,dx'\,. & (33)\end{aligned}$$

Usando la $f(x',0)$, con calcoli standard (trasformata di Fuorier della Gaussiana) si ottiene

$$f(x,t) = e^{-H(t)}\frac{1}{\sqrt{4\pi G(t)}}e^{-\frac{(x-2)^2}{4G(t)}} \tag{34}$$

Notando che

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} G(t) = 1\,, & (35)\\ &\lim_{t\to\infty} H(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^\alpha} = C(\alpha) < \infty \ \ \textit{solo se} \ \ \alpha > 1\,, & (36)\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} f(x,t) = 0 \ \ \textit{se} \ \ \alpha \le 1\,, & (37)\\ &\lim_{t\to\infty} f(x,t) = e^{-C(\alpha)}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{4}} \ \ \textit{se} \ \ \alpha > 1\,. & (38)\end{aligned}$$