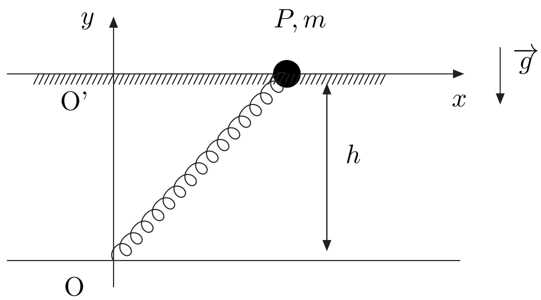
Esonero 13 Novembre 2015

Roberto Bonciani, Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2015-2016

ESONERO 1- FISICA 1 PER MATERMATICA - R. BONCIANI, P. DORE - 13/11/2015

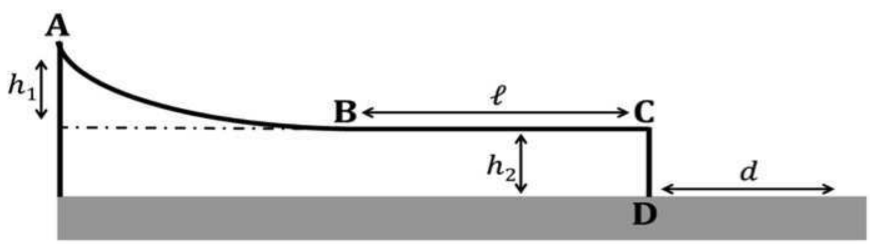
Esercizio 1: (*12 punti*)
Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi su una guida orizzontale con attrito. Il coefficiente di attrito statico è μ_s e quello di attrito dinamico è μ_d. Il punto materiale è collegato al punto O (vedi figura) mediante una molla ideale di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla.



1. Determinare la massima distanza d_{max} dal punto O' alla quale il punto materiale può trovarsi in quiete.
2. Se inizialmente il punto materiale di trova a $d = d_0$ da O', con $v = 0$, calcolare dopo quanto tempo e in quale punto la pallina ha nuovamente $v = 0$.

Valori numerici: $\mu_s = 0.6$, $\mu_d = 0.4$, $k = 60$ N/m, $h = 20$ cm, $m = 500$ g, $d_0 = 30$ cm.

Esercizio 2: (*12 punti*)
Uno sciatore effettua un salto utilizzando un trampolino, rappresentato in figura, composto da una parte in discesa AB ed una orizzontale BC. L'inizio del trampolino (punto A) si trova ad una quota h_1 rispetto alla parte orizzontale BC di lunghezza ℓ; la fine del trampolino (punto C) si trova ad un'altezza h_2 dal suolo.



1. Calcolare la quota h_1 sapendo che lo sciatore atterra alla distanza d dalla base D del trampolino.
2. Calcolare il valore della distanza d' a cui lo sciatore atterrerebbe utilizzando lo stesso trampolino se il tratto BC fosse scabro con coefficiente di attrito dinamico μ_d.

Valori numerici: $h_2 = 5$ m, $d = 10$ m, $\ell = 19$ m, $\mu_d = 0.1$.

Esercizio 3: (*6 punti*)
Su una guida liscia composta da una sezione orizzontale ed una inclinata di un angolo $\theta = 25°$ (vedi figura) viene posto, inizialmente in quiete sulla porzione orizzontale, un punto materiale di massa $m = 2$ kg. Tra il tempo $t_0 = 0$ ed il tempo $t_1 = 5$ s tale massa è sottoposta ad una forza orizzontale diretta come in figura e di modulo $f = A + Bt$ con $A = 2$ N e $B = 4$ N/s. Dopo che l'azione della forza è cessata, il punto materiale inizia a salire lungo il piano inclinato (in presenza della forza di gravità). Ricavare la distanza percorsa dalla massa sulla sezione inclinata della guida prima di fermarsi.

Soluzione Esercizio 1

1. Prendiamo un sistema di riferimento con assi cartesiani come in figura. La forza elastica alla quale il punto materiale è sottoposto ha la seguente forma:

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{i} - kh\mathbf{j}\,. \tag{1}$$

Scrivendo la seconda legge della dinamica lungo le y, si ottiene la reazione normale del vincolo:

$$N = mg + kh\,. \tag{2}$$

La componente x, invece, ci dà (imponendo l'equilibrio) la forza d'attrito radente in funzione della distanza x del punto da O':

$$F_t = kx\,. \tag{3}$$

Siccome $F_t \leq \mu_s N$, si avrà:

$$kx_{max} = \mu_s(mg + kh)\,, \tag{4}$$

da cui:

$$x_{max} = \frac{\mu_s(mg + kh)}{k} = 16.9 \text{ cm}\,. \tag{5}$$

2. Si può risolvere con l'eq del moto o con l'energia.

Equazione del moto. Nel caso in questione, l'equazione del moto lungo le x è data da:

$$m\ddot{x} = \mu_d(mg + kh) - kx\,, \tag{6}$$

da cui

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x - \mu_d\left(g + \frac{k}{m}h\right) = 0\,. \tag{7}$$

Poniamo

$$y = x - \mu_d\left(h + \frac{m}{k}g\right) = x - x_*\,, \tag{8}$$

dove

$$x_* = \mu_d\left(h + \frac{m}{k}g\right) = 11.3 \text{ cm}\,. \tag{9}$$

Allora si ha:

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0\,, \tag{10}$$

equazione del moto armonico, che ha per soluzione generale

$$y(t) = x(t) - x_* = A\cos(\omega t + \phi)\,, \tag{11}$$

dove ϕ e A devono essere trovate imponento le condizioni iniziali e

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10.95 \text{ s}^{-1} \tag{12}$$

è la pulsazione del moto.

Se lasciamo il punto materiale da d_0 con $v_0 = 0$, si ha:

$$\begin{aligned} d_0 &= x_* + A\cos\phi\,, && (13)\\ 0 &= -\omega A\sin\phi\,, && (14) \end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$\phi = 0\,, \qquad A = d_0 - x_*\,. \tag{15}$$

Infine:

$$x(t) = x_* + (d_0 - x_*)\cos(\omega t)\,. \tag{16}$$

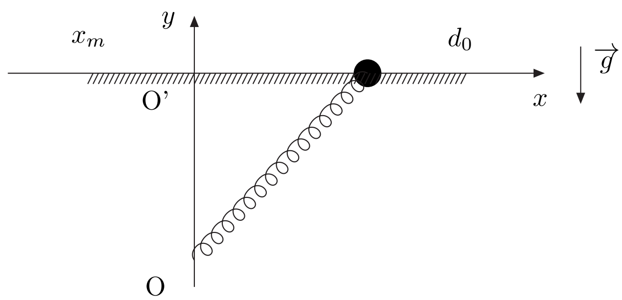
La velocità del punto sarà di nuovo nulla dopo mezzo periodo, ovvero per

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = 0.29\ \text{s}\,. \tag{17}$$

Sostituendo nella (16)

$$x(\pi/\omega) = 2x_* - d_0 = -7.4\ \text{cm}\,. \tag{18}$$

Energia.



.

In questo caso, l'energia cinetica iniziale è nulla così come quella finale. Per cui, il teorema delle forze vive ci dice che:

$$L_{d_0,x} = 0\,. \tag{19}$$

D'altra parte,

$$L_{d_0,x} = \int_{d_0}^{x_m} \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{x} + V(d_0) - V(x_m)\,, \tag{20}$$

dove:

$$\mathbf{F}_t = \mu_d(mg + kh)\,\mathbf{i}\,, \tag{21}$$

$$d\mathbf{x} = -dx\,\mathbf{i} \quad \text{con integrale in } dx \text{ da } x_m \text{ a } d_0\,, \tag{22}$$

$$V(d_0) - V(x_m) = \frac{1}{2}kd_0^2 - \frac{1}{2}kx_m^2\,. \tag{23}$$

In totale:

$$0 = -\mu_d(mg + kh)\int_{x_m}^{d_0} dx + \frac{1}{2}kd_0^2 - \frac{1}{2}kx_m^2\,, \tag{24}$$

$$= -\mu_d(mg + kh)(d_0 - x_m) + \frac{1}{2}kd_0^2 - \frac{1}{2}kx_m^2\,. \tag{25}$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado, si ha:

$$x_m = x_* \pm \sqrt{x_*^2 - (2x_*d_0 - d_0^2)} = x_* \pm |x_* - d_0|\,. \tag{26}$$

dove:

$$x_* = \mu_d\left(h + \frac{mg}{k}\right) = 11.3\ \text{cm}\,. \tag{27}$$

Le due soluzioni sono

$$x_m = 2x_* - d_0 = -7.4\ \text{cm}\,, \tag{28}$$

e $x_m = d_0 = 30$ cm che quindi è da scartare, perché non ha significato fisico.

Soluzione Esercizio 2

1. Se il vincolo è liscio, lo sciatore è soggetto alla sola forza di gravità, che è conservativa.

   Mettiamoci in un sistema di riferimento cartesiano con asse y orientata verso l'alto e asse x orientata verso destra.

   Possiamo utilizzare la conservazione dell'energia per trovare la velocità in C, che chiameremo $\mathbf{v}_0$, in funzione di h_1. Poniamo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale alla quota di C. Allora:

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv_0^2\,, \tag{29}$$

   da cui:

$$v_0 = \sqrt{2gh_1}\,. \tag{30}$$

   Abbiamo preso la soluzione positiva perché nel nostro sistema di riferimento v_0 sarà orientata verso destra:

$$\mathbf{v}_0 = \sqrt{2gh_1}\,\hat{\imath}\,. \tag{31}$$

   Il moto da C a terra sarà caratterizzato dalle seguenti equazioni, lungo gli assi cartesiani:

$$x(t) \;=\; v_{0x}t + x(0)\,, \tag{32}$$
$$y(t) \;=\; -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y(0)\,. \tag{33}$$

   Imponendo le condizioni iniziali

$$x(0) = 0\,, \quad y(0) = h_2\,, \quad v_{0x} = v_0\,, \quad v_{0y} = 0\,, \tag{34}$$

   si ottiene

$$x(t) \;=\; v_0 t\,, \tag{35}$$
$$y(t) \;=\; -\frac{1}{2}gt^2 + h_2\,, \tag{36}$$

   forma parametrica della seguente traiettoria parabolica:

$$t \;=\; \frac{x}{v_0}\,, \tag{37}$$
$$y \;=\; -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + h_2\,. \tag{38}$$

   Imponendo $y = 0$ e prendendo la soluzione positiva si trova

$$x = \sqrt{\frac{2h_2v_0^2}{g}} = 2\sqrt{h_2h_1}\,. \tag{39}$$

   Imponendo $x = d$, infine si ha:

$$h_1 = \frac{d^2}{4h_2} = 5\ \mathrm{m}\,. \tag{40}$$

2. Se il tratto BC è scabro, per trovare la velocità v_0 in C possiamo usare il teorema delle forze vive:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_1 + \int_B^C \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{dx} = mgh_1 - \mu_d N\,L\,. \tag{41}$$

   La reazione normale del vincolo è, per il secondo principio della dinamica

$$N = mg\,, \tag{42}$$

   e quindi

$$v_0^2 = 2(h_1 - \mu_d L)g\,. \tag{43}$$

   Sostituendo questo valore di v_0^2 in Eq. (39), si ottiene

$$d' = 2\sqrt{h_2(h_1 - \mu_d L)} = 7.87\ \mathrm{m}\,. \tag{44}$$

Soluzione Esercizio 3

Troviamo l'impulso comunicato al punto materiale dalla forza $\mathbf{f} = f\hat{\imath}$ nei 5 s in cui agisce. Si ha

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f dt = A(t_1 - t_0) + \frac{B}{2}(t_1^2 - t_0^2) = 60 \text{ Ns}\,. \tag{45}$$

Per il teorema dell'impulso si ha

$$I = mv(t_1) - mv(t_0) = mv(t_1)\,. \tag{46}$$

Quindi, come risultato dell'azione della forza f, il punto materiale acquista una velocità

$$v_1 = v(t_1) = \frac{I}{m} = 30 \text{ m/s}\,. \tag{47}$$

Nel tratto successivo del moto, il punto è soggetto alla sola forza di gravità. Per trovare la distanza percorsa dalla massa sulla sezione inclinata, utilizziamo la conservazione dell'energia meccanica. All'inizio questa è pari all'energia cinetica del punto; alla fine, quando il punto si ferma, sarà pari alla sua energia potenziale. Abbiamo, quindi:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh = mg\,d\sin\theta\,, \tag{48}$$

da cui

$$d = \frac{v_1^2}{2g\sin\theta} = 108.54 \text{ m}\,. \tag{49}$$

Esonero 20 Gennaio 2016

Roberto Bonciani e Paolo Dore

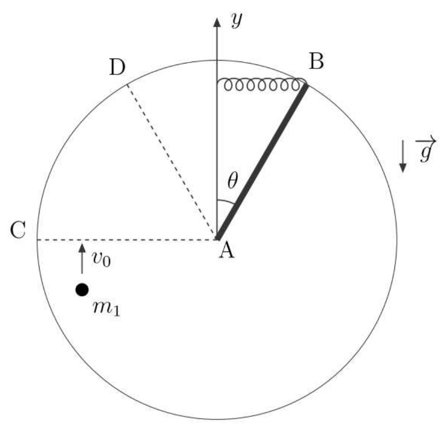
Corso di Fisica Generale 1
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2015-2016

Esonero 2 - Fisica Generale I per matematici
20 Gennaio 2015

R. Bonciani, P. Dore

Il presente esonero NON sarà considerato superato se il punteggio di 15/30 sarà raggiunto con i soli esercizi di meccanica o con i soli esercizi di termodinamica. È obbligatorio affrontare entrambe le parti.

Esercizio 1



Un'asta omogenea di massa m e lunghezza $2l$ è incernierata al suo estremo A ed è vincolata a muoversi su un piano verticale, come mostrato in figura. L'altro estremo, B, è collegato all'asta verticale fissa Ay (asse delle y) tramite una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla. Sia θ l'angolo che l'asta forma con l'asse y.

1. Determinare k affinché $\theta_0 = \pi/6$ sia posizione di equilibrio. *(4 punti)*

2. Al tempo $t = 0$ la molla viene recisa in B e l'asta si trova soggetta alla forza di gravità e ad un momento frenante costante di modulo τ che agisce sulla cerniera in A. Determinare τ sapendo che l'asta arriva alla posizione orizzontale $\theta_1 = \frac{3}{2}\pi$ (punto C) con velocità nulla. *(5 punti)*

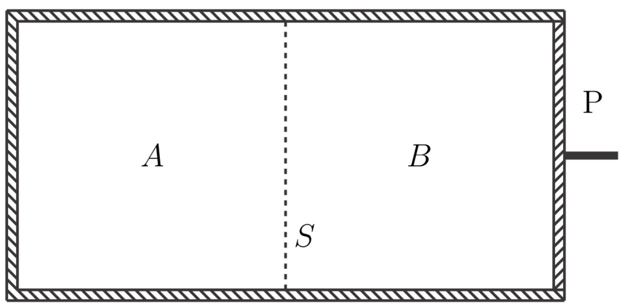
3. Nell'istante in cui l'asta raggiunge con velocità nulla la posizione orizzontale, viene urtata in maniera totalmente anelastica da un proiettile di massa m_1 che giunge dal basso e arriva sulla sbarretta con velocità $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{j}$. L'urto avviene a distanza $\frac{3}{2}l$ da A. Determinare v_0 affinché la sbarretta (che è sempre soggetta anche a τ, il cui valore è stato trovato nella domanda precedente) col proiettile attaccato arrivi in posizione $\theta_2 = \frac{11}{6}\pi$, cioè in posizione simmetrica rispetto a quella da cui è partita al tempo $t = 0$ (punto D). *(6 punti)*

Valori numerici: $m = 240$ g; $l = 80$ cm; $m_1 = 20$ g.

Esercizio 2

Una macchina di Carnot ideale $\mathcal{C}$ lavora fra una sorgente calda a $T_c = 400\,\mathrm{K}$ e una sorgente fredda a $T_f = 300\,\mathrm{K}$. La sorgente fredda è costituita da un sistema termodinamico $\mathcal{X}$ con capacità termica molto grande, in maniera tale che qualunque sia la quantità di calore scambiata da $\mathcal{X}$ la sua temperatura non vari apprezzabilmente e rimanga sempre pari a T_f. Sapendo che dopo un ciclo della macchina $\mathcal{C}$ il sistema $\mathcal{X}$ ha variato la propria entropia di $\Delta S = 5\,\mathrm{J/K}$, calcolare la quantità di calore che $\mathcal{C}$ assorbe dalla sorgente calda. *(5 punti)*

Esercizio 3



Un cilindro a pareti isolanti di volume V_0 è chiuso alla sua estremità da un pistone anch'esso isolante. Inizialmente, il volume V_0 è diviso da un setto rigido S in due parti uguali, A e B. La parte A contiene una mole di gas perfetto monoatomico alla temperatura di $T_A = 27\,^\circ\mathrm{C}$ (e volume $V_A = V_0/2$). La parte B, anch'essa di volume $V_B = V_0/2$, è vuota. Ad un certo istante il setto S viene rimosso e il gas inizialmente racchiuso nella parte A compie un'espansione libera, occupando l'intero volume $V_A + V_B = V_0$. Successivamente, il gas viene compresso dal pistone P in maniera quasi-statica fino a riportarlo ad occupare il volume $V_A = V_0/2$. Disegnare le due trasformazioni nel piano di Clapeyron e determinare le corrispondenti variazioni di energia interna ΔU e di entropia ΔS. *(5 punti)*

Esercizio 4

Una mole di gas perfetto monoatomico è in equilibrio nello stato A, con $T_A = 300\,\mathrm{K}$ e $V_A = 5$ l. Compiendo il lavoro $L_0 = 1728$ J, si effettua una compressione isoterma reversibile che porta il gas ad occupare il volume V_B. Calcolare la quantità di calore Q_0 che deve essere prelevata a volume costante dal gas per riportare la pressione al valore iniziale. *(5 punti)*

Soluzione Esercizio 1

1. Per trovare la posizione di equilibrio basta applicare la seconda cardinale con centro in A. Si avrà:

$$2l \cos\theta_0\, k(2l) \sin\theta_0 - l \sin\theta_0 mg = 0\,, \tag{1}$$

da cui, per $\theta_0 \neq 0$:

$$k = \frac{mg}{4l\cos\theta_0} = \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{mg}{l} = 0.85 \text{ N/m}. \tag{2}$$

2. Si può utilizzare il teorema delle forze vive. L'energia cinetica dell'asta è nulla a $t = 0$ ed è nuovamente nulla quando l'asta arriva con velocità nulla al punto C. Quindi la forza peso e l'attrito in A fanno lavoro tale che:

$$0 = L_{BC} = V(B) - V(C) - \int_B^C \tau d\theta = mgl\cos\theta_0 - \tau(\theta_1 - \theta_0)\,, \tag{3}$$

da cui

$$\tau = \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} mgl = 0.39 \text{ N} \cdot \text{m}. \tag{4}$$

3. Nell'urto si conserva il momento angolare rispetto ad A. Per cui

$$mv_0 \frac{3}{2} l = I_A \omega\,, \tag{5}$$

da cui si ottiene un'espressione per la velocità angolare subito dopo l'urto

$$\omega = \frac{3mv_0 l}{2I_A}\,, \tag{6}$$

dove

$$I_A = \frac{9}{4}m_1 l^2 + \frac{4}{3}ml^2 = 0.23 \text{ kg} \cdot \text{m}^2\,. \tag{7}$$

Utilizzando ancora il teorema delle forze vive si ha:

$$L_{CD} = -\frac{1}{2} I_A \omega^2 \tag{8}$$

D'altra parte si ha anche:

$$L_{CD} = -mgl\cos\theta_2 - m_1 g \frac{3}{2} l \cos\theta_2 - \tau(\theta_2 - \theta_1) = -1.46 \text{ J}\,. \tag{9}$$

Sostituendo la 6 e la 9 nella 8 si ottiene infine:

$$v_0 = \frac{2\sqrt{-2I_A L_{CD}}}{3ml} = 2.8 \text{ m/s}\,. \tag{10}$$

Soluzione Esercizio 2

Se Q_{ced} è la quantità di calore che la macchina $\mathcal{C}$ cede alla sorgente fredda e Q_{ass} è quella che assorbe dalla sorgente calda, si avrà

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{ass}}\,, \tag{11}$$

ovvero

$$Q_{ass} = \frac{|Q_{ced}|}{1-\eta}\,. \tag{12}$$

D'altronde si ha anche

$$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{3}{4} = 0.25 \tag{13}$$

e quindi:

$$Q_{ass} = \frac{4}{3}|Q_{ced}|\,. \tag{14}$$

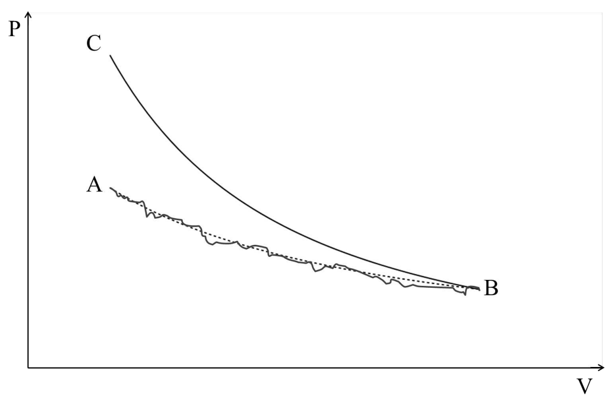
Per determinare $|Q_{ced}|$ utilizziamo l'espressione dell'entropia. Assorbendo $|Q_{ced}|$ il sistema $\mathcal{X}$ aumenta la propria entropia di ΔS, per cui si ha

$$|Q_{ced}| = T_f \Delta S\,. \tag{15}$$

Infine

$$Q_{ass} = \frac{4}{3} T_f \Delta S = 2000\,\mathrm{J}\,. \tag{16}$$

Soluzione Esercizio 3



Nell'espansione libera ($A \to B$) si ha $T_B = T_A$, quindi $\Delta U_{AB} = 0$. Per il calcolo dell'entropia si può utilizzare la corrispondente isoterma reversibile:

$$\Delta S_{AB} = nR \ln \frac{V_B}{V_A} = nR \ln 2 = 5.76\ \mathrm{J/K}\,. \tag{17}$$

La compressione $B \to C$ è un'adiabatica reversibile: $Q_{BC} = 0$, quindi $\Delta S_{BC} = 0$. La variazione di energia interna è data da

$$\Delta U_{BC} = nc_v(T_C - T_B) = nc_v(T_C - T_A) \tag{18}$$

Per calcolare T_C si utilizza la relazione, valida per le trasformazioni adiabatiche,

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \tag{19}$$

Poiché il gas è monoatomico $\gamma = \frac{5}{3}$, inoltre $V_C = V_A$, $T_B = T_A$ e $V_B = 2V_A$, si ottiene quindi

$$T_C = T_A 2^{\frac{2}{3}} = 476 \text{ K} \quad \rightarrow \quad \Delta U_{BC} = nc_v T_A (2^{\frac{2}{3}} - 1) = 2195 \text{ J}\,. \tag{20}$$

Soluzione Esercizio 4

Dall'equazione di stato si ricava la pressione dello stato A:

$$P_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 4.92 \text{ atm}\,. \tag{21}$$

Poiché il lavoro nella trasformazione isoterma è dato da

$$L_B = -L_0 = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} \tag{22}$$

si può ricavare il volume dello stato B:

$$V_B = V_A \exp\left(\frac{-L_0}{nRT_A}\right) = \frac{1}{2} V_A = 2.5 \text{ l}\,. \tag{23}$$

Infine si ricava la temperatura nello stato finale C:

$$T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = \frac{P_A V_B}{nR} = \frac{1}{2}\frac{P_A V_A}{nR} = \frac{1}{2} T_A = 150 \text{ K}\,. \tag{24}$$

Nella trasformazione isocora $L_{BC} = 0$, quindi

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = nc_v (T_C - T_B) = -\frac{1}{2} nc_v T_A \tag{25}$$

Infine

$$Q_0 = -Q_{BC} = \frac{1}{2} nc_v T_A = 1870\text{J}\,. \tag{26}$$

Compito 3 Febbraio 2016

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

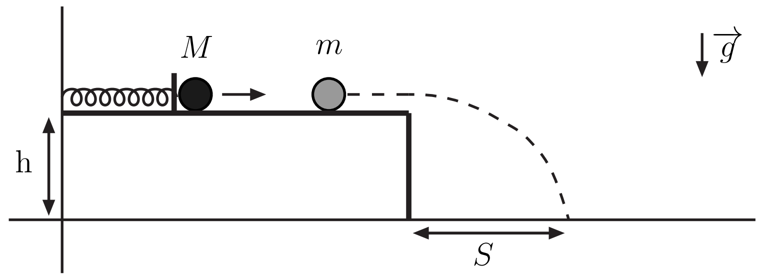
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Anno Accademico 2015-2016

Compito di Fisica Generale 1 per Matematici
3 Febbraio 2016

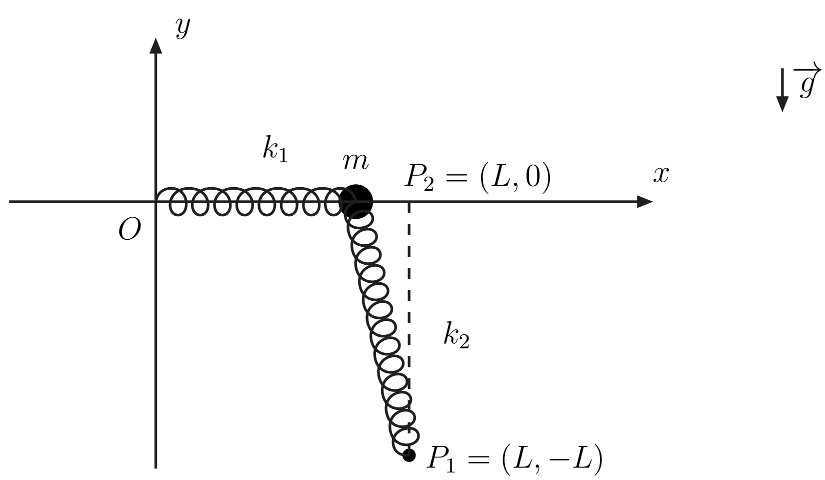
R. Bonciani, P. Dore

Esercizio 1



La massa $M = 1$ kg si trova su un piano orizzontale privo di attrito, rialzato di $h = 2$ m rispetto al suolo. Grazie ad un opportuno sistema di bloccaggio, la massa M è ferma, poggiata ad una molla di costante elastica $k = 100$ N/m, compressa di un tratto $L = 0.2$ m. Quando il blocco viene tolto, M si mette in moto lungo il piano e va ad urtare una seconda massa $m = 0.4$ kg. L'urto è perfettamente anelastico e quindi le due masse formeranno un unico corpo. Determinare la distanza S dal bordo del piano, in cui il corpo toccherà il suolo. *(7 punti, compito completo)*

Esercizio 2



Un punto materiale di massa $m = 0.5$ kg è vincolato a muoversi sull'asse delle x (vedi figura) ed è collegato tramite una molla ideale di costante elastica $k_1 = 20$ N/m e lunghezza di riposo trascurabile al punto O, origine degli assi cartesiani. Un'altra molla ideale, di costante elastica $k_2 = 2k_1 = 40$ N/m e lunghezza di riposo trascurabile, collega m al punto P_1, fisso nel piano verticale xy, di coordinate $(L, -L)$, con $L = 0.5$ m. Dove non diversamente specificato, il vincolo su cui si muove il punto materiale è liscio.

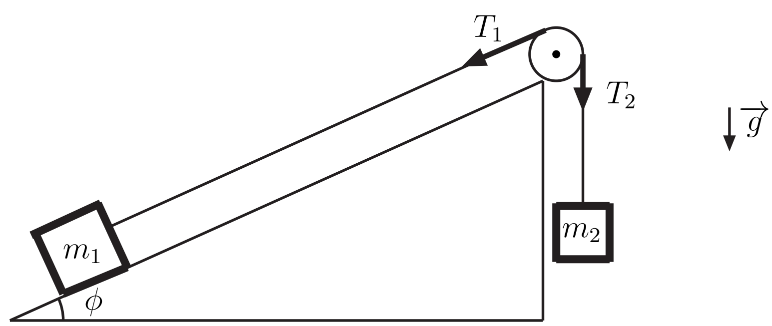
1. Trovare la posizione di equilibrio del punto m soggetto alle due forze elastiche.
   (2 punti, compito completo)

2. Trovare l'equazione del moto e il periodo. *(3 punti, compito completo)*

3. Se fra punto materiale e vincolo c'è attrito statico con coefficiente d'attrito μ_S, trovare il valore minimo di μ_S affinché la posizione P_2 di coordinate $(L, 0)$ (con $L = 0.5$ m) sia di equilibrio. *(3 punti, compito completo)*

****

Esercizio 3



Nel piano in figura, inclinato di un angolo $\phi = \pi/6$ rispetto all'orizzontale, due blocchi di massa rispettivamente $m_1 = 15$ kg e $m_2 = 20$ kg sono collegati da una fune ideale (inestensibile, di massa nulla) che passa su una carrucola di raggio $R = 10$ cm e momento d'inerzia I. Quando i blocchi vengono lasciati liberi, m_2 scende verso il basso, m_1 sale lungo il piano inclinato e la fune, scorrendo senza strisciare sulla carrucola, la mette in rotazione. Sapendo che m_1 sale lungo il piano inclinato con accelerazione $a = 2$ m/s^2, determinare il momento d'inerzia I della carrucola.
NB. Si mette in evidenza il fatto che, come indicato in figura, le forze T_1 e T_2 sono diverse fra loro. *(7 punti, compito completo)*

Esercizio 4

Un cilindro è posto in verticale in un ambiente in cui la pressione è mantenuta costante al valore P_0. Una mole di gas perfetto monoatomico è contenuta nel cilidro, chiuso da un pistone di massa nulla libero di scorrere senza attrito. Cilindro e pistone sono termicamente isolanti. Inizialmente, il gas è in equilibrio nello stato A, in cui occupa un volume V_A alla temperatura $T_A = 300°$K, in quanto sulla faccia esterna del pistone, su cui agisce la pressione P_0, è poggiata la massa m. Quando la massa m viene tolta, sul pistone agisce solo la pressione P_0. Di conseguenza il gas si espande istantaneamente facendo salire il pistone e, dopo un certo tempo, si porta in un nuovo stato di equilibrio B in cui il volume occupato è $V_B = 4V_A$. Determinare la temperatura T_B del gas nello stato B. *(8 punti, compito completo)*

Soluzione Esercizio 1

Inizialmente la massa M ha energia potenziale

$$V_0 = \frac{1}{2}kL^2 \,, \tag{1}$$

che dopo lo sblocco della molla si traduce totalmente in energia cinetica per la conservazione dell'energia. Quindi, la velocità con cui M urta m è:

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}L = 2 \text{ m/s} \,. \tag{2}$$

Nell'urto si conserva la quantità di moto, per cui si avrà:

$$Mv_0 = (M+m)v_1 \,, \tag{3}$$

da cui

$$v_1 = \frac{M}{M+m}v_0 = 1.43 \text{ m/s} \,, \tag{4}$$

che è la velocità orizzontale con cui il corpo di massa $M+m$ si stacca dal piano rialzato.

Per trovare S troviamo il tempo di caduta al suolo, che è dato da

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{5}$$

e lo uguagliamo al tempo in cui il corpo di velocità v_1 percorre S

$$t = \frac{S}{v_1} \,, \tag{6}$$

ottenendo:

$$\frac{2h}{g} = \frac{S^2}{v_1^2} \,. \tag{7}$$

Scartando la soluzione negativa si ha

$$S = \sqrt{\frac{2h}{g}}v_1 = 91 \text{ cm} \,. \tag{8}$$

Soluzione Esercizio 2

1. Usiamo la prima cardinale. Le forze a cui è soggetto il punto materiale sono

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= -kx\,\hat{\imath} \,, && (9)\\ \mathbf{F}_2 &= 2k(L-x)\,\hat{\imath} - 2kL\,\hat{\jmath} \,. && (10)\\ & && (11) \end{aligned}$$

Imponiamo lungo le x l'equilibrio:

$$-kx + 2k(L-x) = 0 \,, \tag{12}$$

ovvero

$$x = \frac{2}{3}L = 0.33 \text{ m} \,. \tag{13}$$

2. Si ha
$$m\ddot{x} = -kx + 2k(L-x) = -3kx + 2kL\,, \tag{14}$$
ovvero
$$\ddot{x} + \frac{3k}{m}x - \frac{2kL}{m} = 0\,, \tag{15}$$
moto armonico con periodo
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}} = 0.57 \text{ s}\,. \tag{16}$$

3. Lungo le y abbiamo
$$N = mg + 2kL = 24.9 \text{ N}\,, \tag{17}$$
mentre lungo le x si ha
$$F_t = kL = 10 \text{ N}\,, \tag{18}$$
ovvero
$$kL \leq \mu_S(mg + 2kL)\,, \tag{19}$$
cioè:
$$\mu_S \geq \frac{kL}{mg + 2kL} = \frac{1}{2 + \frac{mg}{kL}} = 0.4 \tag{20}$$

Soluzione Esercizio 3

Applichiamo il secondo principio ai due blocchi mi massa m_1 e m_2. Si ha
$$m_1 a = T_1 - m_1 g \sin\phi\,, \tag{21}$$
$$m_2 a = m_2 g - T_2\,. \tag{22}$$

Per la carrucola invece potremo scrivere la seconda cardinale centrata nel centro della carrucola (che coincide con l'asse di rotazione):
$$T_2 R - T_1 R = I\ddot{\theta}\,, \tag{23}$$
dove abbiamo indicato con θ l'angolo di rotazione della carrucola, con $\dot{\theta} > 0$ se ruota in senso orario. Siccome la fune non striscia sulla carrucola, si ha anche la relazione
$$R\ddot{\theta} = a\,, \tag{24}$$
che sostituita nella (23) dà:
$$(T_2 - T_1)R = I\frac{a}{R}\,. \tag{25}$$
Utilizzando le due relazioni (22), si ottiene:
$$\begin{aligned} I &= \frac{R^2}{a}(T_2 - T_1) = \frac{R^2}{a}(m_2 g - m_2 a - m_1 a - m_1 g \sin\phi) \\ &= \frac{R^2}{a}\Big\{(m_2 - m_1 \sin\phi)g - (m_2 + m_1)a\Big\} = 0.26 \text{ kg} \quad \text{m}^2 \end{aligned} \tag{26}$$

Soluzione Esercizio 4

Dall'equazione di stato nelle due configurazioni di equilibrio A e B si ottiene

$$\begin{aligned} p_A V_A &= RT_A \,, \qquad (27) \\ p_B V_B &= RT_B \,, \qquad (28) \end{aligned}$$

dove $p_B = p_0$ e $V_B = 4V_A$. Quindi

$$p_0 = \frac{RT_B}{4V_A} \,. \qquad (29)$$

La trasformazione che subisce la mole di gas perfetto è un'adiabatica non reversibile, ma il sistema fa lavoro contro la pressione costante p_0, quindi il lavoro L è calcolabile come l'opposto del lavoro (negativo) subito dall'ambiente. Siccome $Q = 0$, il primo principio ci dice che

$$\Delta U = -L \,. \qquad (30)$$

Il lavoro nella trasformazione $A \to B$ sarà dato da

$$L = \int_A^B p_0 dV = p_0(V_B - V_A) > 0 \,, \qquad (31)$$

come deve essere in quanto il gas si espande e quindi fa lavoro sull'ambiente. Usando la relazione (29) si ha

$$L = \frac{3}{4} RT_B \,. \qquad (32)$$

Essendo il sistema un gas perfetto, si ha

$$\Delta U = \tilde{c}_V (T_B - T_A) \,, \qquad (33)$$

dove $\tilde{c}_V$ è il calore specifico molare a volume costante, che per un gas monoatomico vale

$$\tilde{c}_V = \frac{3}{2} R \,. \qquad (34)$$

In totale quindi si ha

$$\frac{3}{2} R(T_B - T_A) = -\frac{3}{4} RT_B \,, \qquad (35)$$

ovvero

$$T_B = \frac{2}{3} T_A = 200^\circ \text{ K} \,. \qquad (36)$$

Compito 24 Febbraio 2016

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

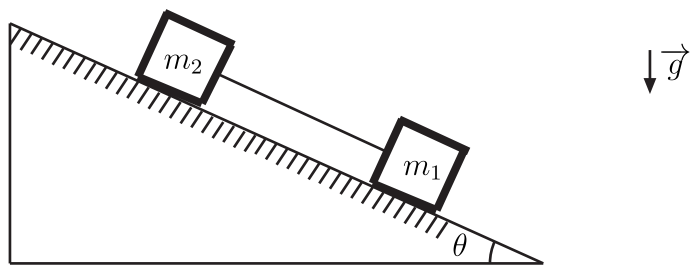
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Anno Accademico 2015-2016

Compito di Fisica Generale I per matematici
24 Febbraio 2016

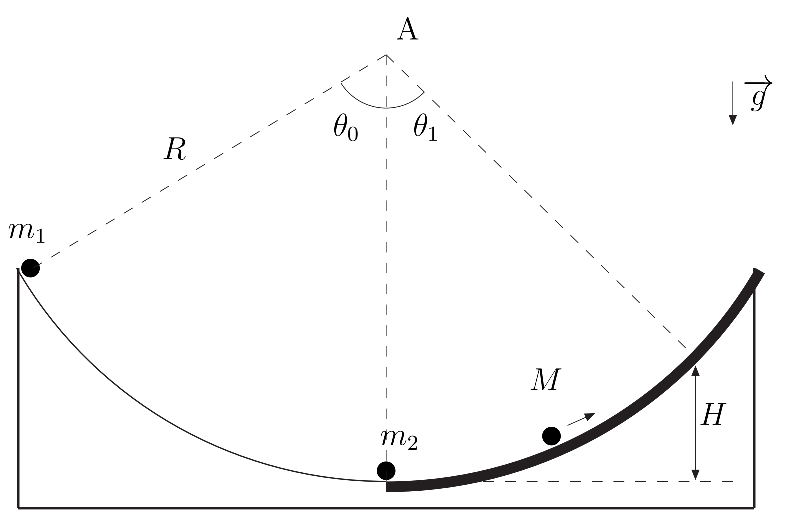
R. Bonciani, P. Dore

Esercizio 1



Due corpi di massa $m_1 = 3$ kg ed $m_2 = 1$ kg, connessi da una fune ideale, scivolano su un piano scabro, inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Il coefficiente di attrito fra corpo e piano vale $\mu_1 = 0.1$ per il corpo 1 e $\mu_2 = 0.2$ per il corpo 2. Per come è fatto il sistema (vedi figura), m_1 precede m_2 nella discesa e la fune rimane sempre tesa. Determinare il valore di θ per il quale il sistema dei due corpi procede con velocità costante.

Esercizio 2

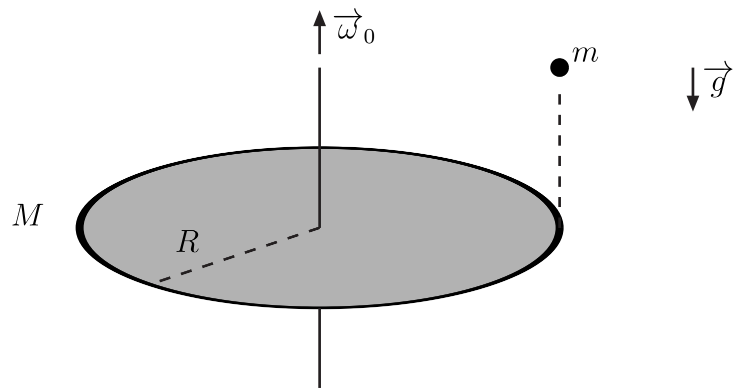


Un corpo puntiforme di massa $m_1 = 2$ kg è posto su una guida circolare verticale di raggio $R = 0.5$ m e centro A (vedi figura) fermo nella posizione iniziale ad un angolo $\theta = \theta_0 = \pi/4$ con la verticale. La parte di sinistra della guida circolare, cioè il tratto che va dalla posizione con $\theta = \theta_0$ a $\theta = 0$, è liscia, mentre la parte di destra è scabra (indicata in figura con una linea in grassetto). Ad un certo istante, la massa m_1 viene lasciata libera e va ad urtare un secondo corpo di massa $m_2 = 1$ kg posto a $\theta = 0$. Nell'urto, completamente anelastico, si forma un unico sistema, di massa $M = m_1 + m_2$, che si muoverà con velocità V. Notare che un istante prima dell'urto la velocità di m_1 è orizzontale, così come la velocità

V immediatamente dopo. Il corpo M entra quindi nella parte della guida scabra ed inizia a salire lungo tale tratto. Nella salita agisce una forza di attrito F_A costante in modulo (NB. COSTANTE, non proporzionale in modulo alla reazione vincolare normale!!) che agisce sempre in verso opposto alla velocità con cui M sale lungo la guida. Sapendo che la quota massima a cui arriva M è $H = 3.806$ cm, determinare il modulo di F_A. Il moto avviene in presenza della gravità.

****

Esercizio 3



Un disco omogeneo di massa $M = 3$ kg e raggio $R = 0.5$ m è vincolato a ruotare in un piano orizzontale attorno ad un asse fisso passante per il suo centro. Ad un certo istante, quando la velocità angolare con cui sta ruotando vale $\omega_0 = 10$ rad/s, una pallina di massa $m = 1$ kg, lasciata libera di cadere dall'alto lungo la verticale, colpisce con velocità $v_0 = 3$ m/s il bordo del disco e vi rimane attaccata a causa di un urto completamente anelastico.

i) Determinare la velocità angolare del sistema disco+pallina immediatamente dopo l'urto.

ii) Determinare la perdita di energia meccanica del sistema disco+pallina a seguito dell'urto completamente anelastico.

iii) Immediatamente dopo l'urto, sul sistema disco+pallina agisce un momento frenante τ costante. Determinare il valore di τ sapendo che il sistema si ferma dopo $n = 10$ giri.

Esercizio 4

Una mole di gas perfetto monoatomico, inizialmente in equilibrio nello stato A, con $V_A = 12$ l e $P_A = 2$ atm, esegue una prima trasformazione isoterma reversibile, con cui la pressione del gas viene raddoppiata, seguita da una adiabatica reversibile con cui il gas viene portato nello stato finale C in cui $V_C = \frac{1}{4}V_A$. Disegnare le due trasformazioni nel piano di Clapeyron e determinare la variazione di energia interna e di entropia nel passaggio dallo stato A allo stato C.

Soluzione Esercizio 1

La fune è tesa, quindi i due corpi si muovono con la stessa accelerazione a. Le equazioni del moto sono:

$$m_1 a = m_1 g \sin\theta - \mu_1 m_1 g \cos\theta - T \tag{1}$$

$$m_2 a = m_2 g \sin\theta - \mu_2 m_2 g \cos\theta + T \tag{2}$$

Sommando le due equazioni si ottiene:

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 + m_1) g \sin\theta - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) g \cos\theta \tag{3}$$

e quindi

$$a = g\left[\sin\theta - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}\cos\theta\right] \tag{4}$$

Se la velocità del sistema è costante allora $a = 0$ e quindi:

$$\sin\theta = \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}\cos\theta \tag{5}$$

da cui

$$\tan\theta = \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} = 0.125 \tag{6}$$

Si ottiene infine θ =7,1°.

Soluzione Esercizio 2

Poiché il moto del corpo 1 prima dell'urto non è soggetto ad attriti, la velocità v_1 con cui arriva nella posizione $\theta = 0$ subito prima dell'urto si ricava dalla conservazione dell'energia meccanica:

$$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \to \quad v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gR(1-\cos\theta_0)} = 1.7 \text{ m/s}\,. \tag{7}$$

Nell'urto anelastico si conserva la quantità di moto, quindi:

$$MV = m_1 v_1 \quad \to \quad V = \frac{m_1}{M} v_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 1.13 \text{ m/s}\,. \tag{8}$$

Applicando il teorema delle forze vive al moto del sistema che sale lungo la guida si ottiene:

$$-\frac{1}{2} M V^2 = -MgH + L_A \tag{9}$$

dove $L_A = -F_A R \theta_1$ è il lavoro della forza di attrito e θ_1, ovvero l'angolo rispetto alla normale alla fine della salita, si ricava da:

$$H = R(1 - \cos\theta_1) \quad \to \quad \theta_1 = \arccos\left(1 - \frac{H}{R}\right) = \frac{\pi}{8} = 0.3927\,. \tag{10}$$

Sostituendo nella (9) si ottiene infine:

$$F_A = \frac{\frac{1}{2} M V^2 - MgH}{R\theta_1} = 4.05 \text{ N}\,. \tag{11}$$

Soluzione Esercizio 3

Poiché la velocità della pallina è parallela all'asse di rotazione del disco, essa non contribuisce alla componente $L_\parallel$ del momento angolare parallela ad esso. Nell'urto anelastico $L_\parallel$ si conserva, quindi:

$$I_0\omega_0 = (I_0 + mR^2)\omega_f \tag{12}$$

dove

$$I_0 = \frac{1}{2}MR^2 = 0.375 \text{ kg m}^2 \tag{13}$$

è il momento d'inerzia del disco. Quindi la velocità angolare del sistema dopo l'urto è:

$$\omega_f = \frac{I_0}{I_0 + mR^2}\omega_0 = 6.0 \text{ rad/s}\,. \tag{14}$$

L'energia meccanica prima e dopo l'urto sono:

$$E_0 = \frac{1}{2}I_0\,\omega_0^2 + \frac{1}{2}m\,v_0^2 = 23.25 \text{ J}\,, \tag{15}$$

$$E_f = \frac{1}{2}\left(I_0 + mR^2\right)\omega_f^2 = 11.25 \text{ J}\,. \tag{16}$$

La perdita di energia meccanica nell'urto è quindi $\Delta E = |E_f - E_0| = 12.0$ J.

Per il teorema delle forze vive abbiamo:

$$L_\tau = K_f - K_i = -K_i = -\frac{1}{2}\left(I_0 + mR^2\right)\omega_f^2 = -E_f\,. \tag{17}$$

D'altra parte si ha

$$L_\tau = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{d\theta} = -|\overrightarrow{\tau}| \int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = -|\overrightarrow{\tau}|\, 2\pi n\,. \tag{18}$$

Quindi in totale si ha:

$$|\overrightarrow{\tau}| = \frac{E_f}{2\pi n} = 0.18 \text{ N m}\,. \tag{19}$$

Soluzione Esercizio 4

Dall'equazione di stato dei gas perfetti si ricava:

$$T_A(= T_B) = \frac{P_A V_A}{R} = 292.7\ {}^\circ\text{K}\,. \tag{20}$$

Poiché la trasformazione $A \to B$ è isoterma $P_B V_B = P_A V_A$, da cui $V_B = \frac{1}{2}V_A = 6$ l, quindi la trasformazione è una compressione.
Inoltre $\Delta U_{AB} = 0$ e, per il Primo Principio, $Q_{AB} = L_{AB}$. Quindi, si fa lavoro L_{AB} sul sistema, che cede il calore Q_{AB} all'ambiente. La variazione di entropia è quindi data da

$$\Delta S_{AB} = \frac{Q_{AB}}{T_A} = \frac{L_{AB}}{T_A} = R\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = R\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -5.76 \text{ J/}^\circ\text{K}\,. \tag{21}$$

La trasformazione $B \to C$ è un'adiabatica reversibile, quindi, per le formule di Poisson

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}\,, \tag{22}$$

da cui:

$$T_C = T_B \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} = T_B\,(2)^{2/3} = 464.6\ ^\circ\mathrm{K}\,. \tag{23}$$

dove abbiamo usato il fatto che il gas in considerazione è monoatomico e quindi $\gamma = 5/3$. Inoltre, siccome $Q = 0$, $\Delta S_{BC} = 0$. Per quanto riguarda l'energia interna, invece,

$$\Delta U_{BC} = \tilde{c}_V (T_C - T_B) = \frac{3}{2} R (T_C - T_A) = 2142.7\ \mathrm{J}\,. \tag{24}$$

Le variazioni totali di energia interna e di entropia sono quindi date da:

$$\Delta U_{AC} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} = \Delta U_{BC} = 2142.7\ \mathrm{J} \tag{25}$$

$$\Delta S_{AC} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} = \Delta S_{AB} = -5.76\ \mathrm{J}/^\circ\mathrm{K}\,. \tag{26}$$

Compito 21 Giugno 2016

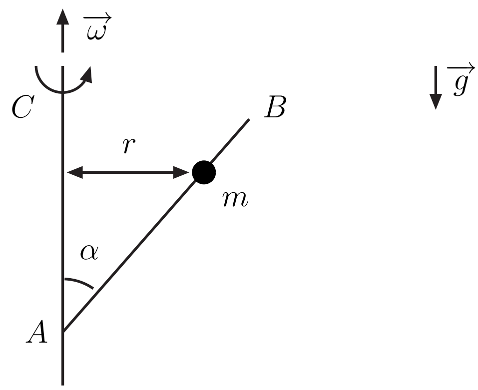
Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2015-2016

Compito di Fisica Generale I per matematici
21 Giugno 2016

R. Bonciani, P. Dore

Esercizio 1



Un anellino di massa m è infilato in un'asta AB inclinata di un angolo α rispetto alla verticale e collegata rigidamente tramite il punto A ad un'altra asta verticale, AC, che ruota a velocità angolare costante ω (vedi figura).

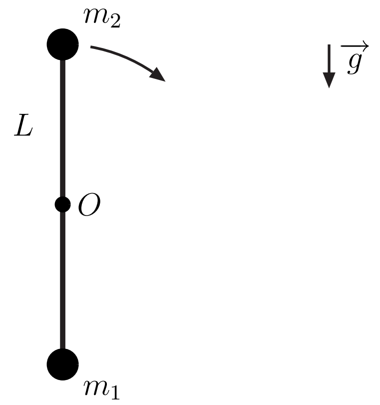
1. Fra anello (di dimensioni trascurabili e quindi da considerare puntiforme) e asta non c'è attrito (vincolo liscio). Trovare il valore di $\omega = \omega_0$, per il quale l'anello m stia in equilibrio a distanza $r = r_0$ dall'asta verticale. *(4 punti)*

2. Fra anello e asta c'è attrito con coefficiente di attrito statico $\mu_S = 0.6$. Trovare per quali valori di ω l'anello m rimane in equilibrio a distanza r_0 dalla verticale. *(4 punti)*

3. Nel caso di vincolo liscio si fa ruotare il sistema a $\omega = 2\omega_0$ con un motore che è in grado di assicurare velocità angolare costante qualunque cosa succeda. Lasciando l'anello da fermo in $r = r_0$ trovare la sua equazione di moto nel sistema di riferimento rotante. *(2 punti)*

Dati numerici: $|\vec{g}| = 9.8$ m s^{-2}, $r_0 = 20$ cm, $\alpha = \pi/4$, $m = 500$ g.

Esercizio 2



Un manubrio è costituito da un'asta omogenea di massa m e lunghezza $2L$ ai capi della quale sono fissate due masse, m_1 e $m_2 > m_1$. Il sistema è disposto su un piano verticale ed è vincolato a ruotare senza attrito attorno ad un'asse orizzontale passante per il centro O dell'asta (il sistema è bi-dimensionale). Il sistema è inizialmente disposto nella posizione di equilibrio instabile (con la massa m_2 alla quota più alta) ed una piccola perturbazione ne provoca la rotazione.

1. Calcolare la posizione iniziale del centro di massa del sistema. *(3 punti)*

2. Calcolare il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione passante per O. *(3 punti)*

3. Calcolare velocità e accelerazione del centro di massa quando il sistema passa per la posizione di equilibrio stabile (massa m_2 alla quota più bassa). *(4 punti)*

Dati numerici: $m = 2$ kg, $m_1 = m = 2$ kg, $m_2 = 3m = 6$ kg, $L = 80$ cm.

Esercizio 3

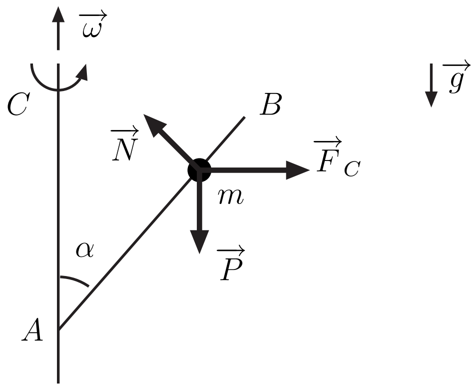
Una mole di gas perfetto monoatomico è inizialmente in equilibrio nello stato A, alla temperatura $T_A = 300°$K. Il gas subisce una trasformazione isocora quasi statica che lo porta a raddoppiare la pressione, seguita da una trasformazione adiabatica quasi statica con la quale il gas è riportato alla pressione iniziale. Infine, una trasformazione isobara quasi statica riporta il gas nello stato iniziale A.

1. Disegnare il ciclo nel piano di Clapeyron. *(3 punti)*

2. Calcolarne il rendimento. *(7 punti)*

Soluzione Esercizio 1

1. Ci mettiamo nel sistema di riferimento solidale con l'asta AC. In questo SdR l'anello di massa m è soggetto alla forza peso e alla forza centrifuga, oltre che alla reazione vincolare che può essere solo perpendicolare all'asta AB.



Prendendo un SdR che abbia l'asse verticale orientata come ω e quella orizzontale perpendicolare ad AC, si ha, imponendo le condizioni di equilibrio:

$$F_C - N\cos\alpha = 0\,, \tag{1}$$
$$N\sin\alpha - P = 0\,, \tag{2}$$

dove $F_C = m\omega^2 r$, se r è la distanza di m dall'asse di rotazione, e $P = mg$.

Posto $r = r_0$, si ha:

$$N = \frac{mg}{\sin\alpha}\,, \tag{3}$$
$$\omega_0^2 = \frac{g}{r_0}\text{cotg}\alpha\,, \tag{4}$$

e quindi

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{r_0}\text{cotg}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\frac{g}{r_0}} = 7\ \text{s}^{-1}\,. \tag{5}$$

2. Nel caso con attrito abbiamo anche una reazione vincolare tangente all'asta AB, $\vec{F}_t$, tale che

$$|\vec{F}_t| \leq \mu_S|\vec{N}|\,. \tag{6}$$

I valori di ω minimo e massimo, ω_{min} e ω_{max}, si otterranno rispettivamente quando $|\vec{F}_t| = \mu_S|\vec{N}|$ e $\vec{F}_t$ punta verso B e quando invece, con $|\vec{F}_t| = \mu_S|\vec{N}|$, $\vec{F}_t$ punta verso A.

Nel primo caso abbiamo:

$$0 = F_C + F_t\sin\alpha - N\cos\alpha\,, \tag{7}$$
$$0 = N\sin\alpha + F_t\cos\alpha - mg\,, \tag{8}$$

ovvero

$$\begin{aligned} 0 &= m\omega^2 r + \mu_S N \sin\alpha - N\cos\alpha\,, &(9)\\ 0 &= N\sin\alpha + \mu_S N\cos\alpha - mg\,. &(10) \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione si ottiene:

$$N = \frac{mg}{\sin\alpha + \mu_S\cos\alpha}\,, \tag{11}$$

e sostituendola nella prima, ricordando che $\alpha = \pi/4$ si ottiene:

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{\cos\alpha - \mu_S\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu_S\cos\alpha}\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{1-\mu_S}{1+\mu_S}\frac{g}{r}} = 3.74\ \mathrm{s}^{-1}\,. \tag{12}$$

Per trovare ω_{max} invece abbiamo:

$$\begin{aligned} 0 &= F_C - F_t\sin\alpha - N\cos\alpha\,, &(13)\\ 0 &= N\sin\alpha - F_t\cos\alpha - mg\,, &(14) \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} 0 &= m\omega^2 r - \mu_S N \sin\alpha - N\cos\alpha\,, &(15)\\ 0 &= N\sin\alpha - \mu_S N\cos\alpha - mg\,, &(16) \end{aligned}$$

e quindi

$$N = \frac{mg}{\sin\alpha - \mu_S\cos\alpha}\,, \tag{17}$$

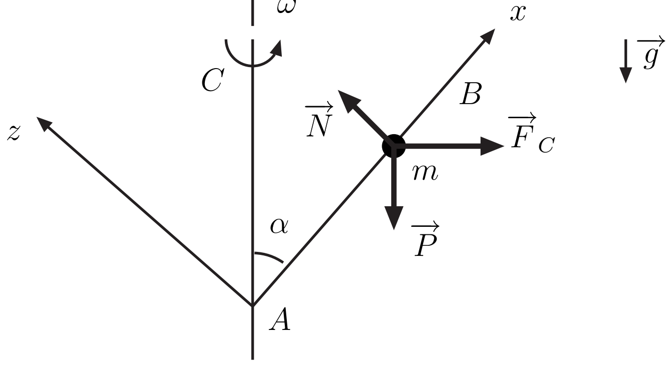
e

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{\cos\alpha + \mu_S\sin\alpha}{\sin\alpha - \mu_S\cos\alpha}\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{1+\mu_S}{1-\mu_S}\frac{g}{r}} = 13.10\ \mathrm{s}^{-1}\,. \tag{18}$$

In totale:

$$3.74\ \mathrm{s}^{-1} \le \omega \le 13.10\ \mathrm{s}^{-1}\,. \tag{19}$$

3. Il moto nel SdR rotante (solidale con l'asta) è unidimensionale lungo l'asta AB. Prendiamo questa come coordinata x, con centro in A.



Le forze che agiscono sull'anello m lungo tale direzione sono la componente x della forza centrifuga e della forza peso.

Si ha

$$m\ddot{x} = m\omega^2 \sin^2 \alpha x - mg \cos\alpha = 4m\omega_0^2 \sin^2 \alpha x - mg \cos\alpha\,, \tag{20}$$

dove abbiamo esplicitato la condizione data dal problema $\omega = 2\omega_0$.

Riscrivendo la (20) si trova la seguente equazione del moto, indipendente dalla massa

$$\ddot{x} - 2\omega_0^2 x = -g\frac{\sqrt{2}}{2}\,. \tag{21}$$

NB. Il moto si svolge solo lungo la coordinata x. Per trattare il problema nella sua completezza, bisognerebbe tener conto anche della componente delle forze agenti su m perpendicolare a x, ma sullo stesso piano (coordinata z), che si dovranno fare equilibrio, e anche a quella perpendicolare al piano costituito dalla verticale e dall'asta AB (coordinata y).

Lungo la coordinata z avremo

$$N = m\omega^2 \sin\alpha x \cos\alpha + mg \sin\alpha\,. \tag{22}$$

Lungo la coordinata y, invece, la reazione normale del vincolo dovrà bilanciare la forza di Coriolis che agisce sull'anello m per il fatto stesso che si muove sulle x. Ciò fa sì che per mantenere una velocità angolare costante durante il moto di m sulle x, il motore che fa girare l'asta debba far lavoro.

Soluzione Esercizio 2

1. Il centro di massa del manubrio si calcola tenendo conto delle sue componenti. L'asta ha il centro di massa in O. Quindi si ha

$$y_{cm} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_2 L - m_1 L}{m + m_1 + m_2} = \frac{2}{5}L = 32 \text{ cm}\,. \tag{23}$$

2. Il momento d'inerzia del manubrio rispetto all'asse passante per O si compone di tre pezzi: il momento d'inerzia della sbarretta I_{sb} e quello delle due masse I_{m_1} e I_{m_2}. Si ha:

$$I_O = I_{sb} + I_{m_1} + I_{m_2} = m\frac{(2L)^2}{12} + L^2(m_1 + m_2) = \frac{13}{3}mL^2 = 5.55 \text{ kg m}^2\,. \tag{24}$$

3. Si può risolvere con l'energia. Nella configurazione iniziale il manubrio ha tutta energia potenzile dovuta alla sua energia gravitazionale. Si avrà

$$U_0 = 5mg\frac{2}{5}L = 2mgL = 31.36 \text{ Nm}\,. \tag{25}$$

Nella configurazione di equilibrio stabile, l'energia del manubrio sarà data dalla sua energia cinetica e da quella potenziale:

$$\begin{aligned} U &= -5mg\frac{2}{5}L = -2mgL = -31.36 \text{ Nm}\,, &(26)\\ T &= \frac{1}{2}I_0\omega^2\,, &(27)\end{aligned}$$

dove ω è la velocità angolare del manubrio nell'istante in cui passa dalla configurazione di equilibrio stabile. Per la conservazione dell'energia si ha

$$\frac{1}{2}I_0\omega^2 - 5mg\frac{2}{5}L = 5mg\frac{2}{5}L\,, \tag{28}$$

da cui

$$\omega = \sqrt{\frac{8mgL}{I_0}} = \sqrt{\frac{24}{13}\frac{g}{L}} = 4.76 \text{ s}^{-1}\,. \tag{29}$$

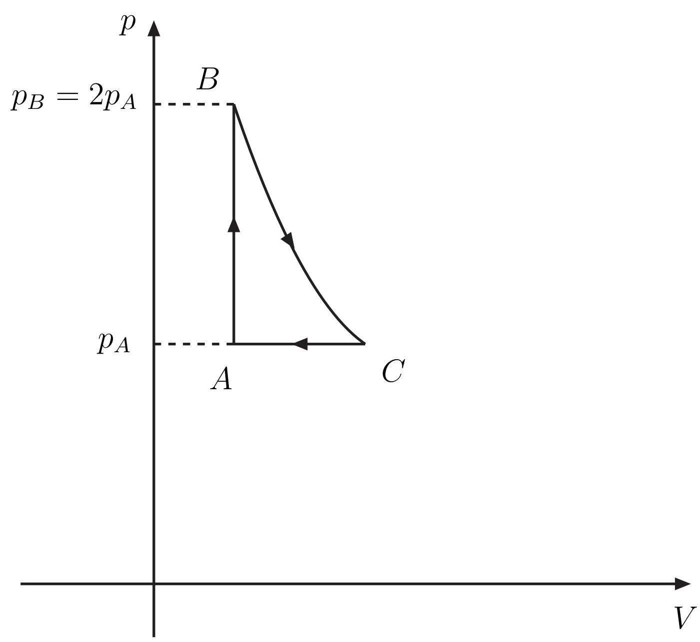
La velocità e l'accelerazione del centro di massa saranno date da (moto circolare):

$$\begin{aligned} v_{cm} &= \omega\frac{2}{5}L = 1.52 \text{ m/s}\,, &(30)\\ a_{cm} &= \frac{v_{cm}^2}{r} = \frac{4}{25}\omega^2 L^2\frac{5}{2L} = \frac{2}{5}\omega^2 L = 7.24 \text{ m s}^{-2}\,, &(31)\end{aligned}$$

dove abbiamo considerato che nel punto di equilibrio stabile l'unica componente non nulla dell'accelerazione è quella radiale. La velocità v_{cm} sarà diretta tangenzialmente alla circonferenza che descrive il centro di massa nel suo moto (quindi in particolare sarà orizzontale con verso da destra verso sinistra), mentre l'accelerazione sarà radiale e diretta verso il centro.

Soluzione Esercizio 3

1. Il ciclo nel piano di Clapeyron è:



2. In A scriviamo l'equazione del gas perfetto:

$$p_A V_A = RT_A \,. \tag{32}$$

In B analogamente abbiamo

$$p_B V_A = RT_B \,, \tag{33}$$

e sapendo che $p_B = 2p_A$ si ottiene

$$T_B = 2T_A = 600°\mathrm{K} \,. \tag{34}$$

Per l'adiabatica quasi statica valgono le formule di Poisson, quindi:

$$p_B V_B^\gamma = p_A V_C^\gamma \,, \tag{35}$$

con $\gamma = 5/3$, nel caso monoatomico. Allora

$$V_C = 2^{\frac{1}{\gamma}} V_A \,, \tag{36}$$

e

$$T_C = \frac{p_C V_C}{R} = \frac{p_A V_A}{R} 2^{\frac{1}{\gamma}} = T_A 2^{\frac{3}{5}} = 454.7°\mathrm{K} \,. \tag{37}$$

Il sistema cede calore nella trasformazione CA e acquista calore nella AB.

Il rendimento è definito come

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{ceduto}|}{Q_{assorbito}} = 1 - \frac{|Q_{CA}|}{Q_{AB}} \,. \tag{38}$$

Lungo l'isocora, siccome il volume rimane costante, applicando il Primo Principio si ottiene:

$$đQ = dU + pdV = dU \,, \tag{39}$$

e quindi

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = c_V (T_B - T_A) = \frac{3}{2} R (T_B - T_A) \,. \tag{40}$$

Lungo l'isobara invece si ha

$$đQ = dH - V dp = dH \,, \tag{41}$$

e quindi

$$Q_{CA} = \Delta H_{CA} = c_p (T_A - T_C) = -\frac{5}{2} R (T_C - T_A) \,. \tag{42}$$

Infine, si ottiene

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{CA}|}{Q_{AB}} = 1 - \frac{5}{3} \frac{(T_C - T_A)}{(T_B - T_A)} = 1 - \frac{5}{3} (2^{\frac{3}{5}} - 1) = 0.14 \,. \tag{43}$$

Compito 19 Luglio 2016

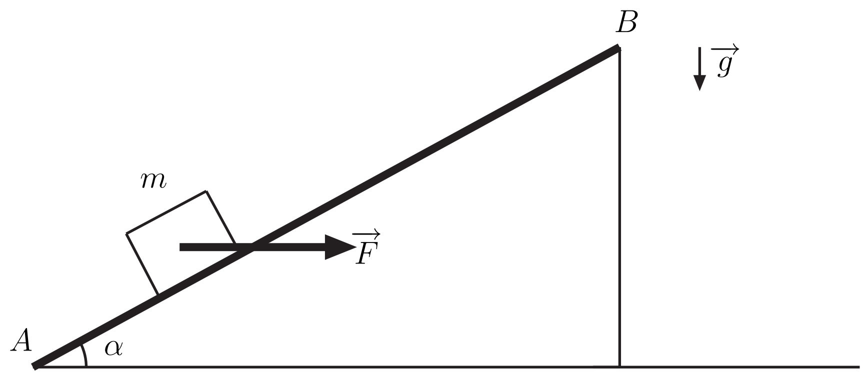
Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2015-2016

Compito di Fisica Generale I per matematici
19 Luglio 2016

R. Bonciani, P. Dore

Esercizio 1



Un corpo di massa m si muove in salita lungo un binario inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale (vedi figura). Fra binario e corpo m c'è attrito dinamico, con coefficiente μ_d. Il corpo può essere approssimato ad un punto materiale. In A il corpo ha velocità v_A, diretta lungo il tratto AB, verso B. Lungo tutto il tratto AB il corpo è soggetto alla forza $\vec{F}$, orizzontale e in modulo costante. Nel punto B il binario finisce (la forza $\vec{F}$ cessa di agire) e il corpo prosegue il suo moto nel vuoto. Si determinino:

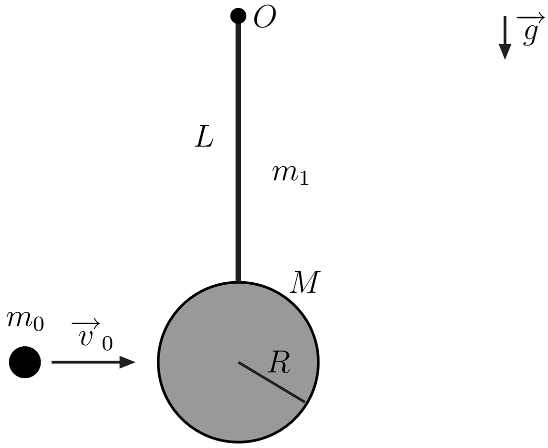
1. Il modulo della velocità v_B in B.

2. La quota massima h_{max} raggiunta dal corpo.

3. L'energia cinetica del corpo nel momento in cui tocca il suolo.

Dati numerici: $m = 15$ kg, $\alpha = \pi/6$, $|\vec{F}| = 200$ N, $\mu_d = 0.2$, $v_A = 10$ m s^{-1}, AB = 18 m.

Esercizio 2



Un sistema rigido è costituito da un'asta omogenea di massa m_1 e lunghezza L saldata ad una sua estremità ad un disco omogeneo di raggio R e massa M. Il sistema ha l'altra estremità dell'asta incernierata (senza attrito) nel punto O ed è soggetto alla forza di gravità. Il **pendolo composto** così costituito è quindi libero di oscillare attorno ad O su un piano verticale. All'istante $t = 0$ il sistema è a riposo nella posizione di equilibrio stabile e un proiettile di massa m_0 e velocità v_0 orizzontale lo colpisce elasticamente sul disco, all'altezza del suo centro. Calcolare

1. l'angolo massimo θ_{max} rispetto alla verticale raggiunto dal sistema dopo l'urto;
2. il periodo delle piccole oscillazioni del moto del pendolo composto dopo l'urto;
3. la velocità del proiettile (in modulo direzione e verso) subito dopo l'urto.

Dati numerici: $m_0 = 200$ g, $m_1 = 1$ kg, $M = 4$ kg, $L = 60$ cm, $R = 10$ cm, $|\vec{v}_0| = 5$ m s^{-1}.

Esercizio 3

Una mole di gas perfetto monoatomico inizialmente in equilibrio nello stato A, alla temperatura $T_A = 500°$K e volume V_A, compie una trasformazione adiabatica reversibile che lo porta nello stato B, con temperatura $T_B = T_A/2 = 250°$K. Tale trasformazione, è seguita da una trasformazione reversibile di equazione $pV^2 = cost$ che porta il gas nello stato C a temperatura $T_C = T_A$ e un volume $V_C = \sqrt{2}V_A$. Il gas compie infine un'isoterma reversibile che riporta il sistema nello stato iniziale A.

1. Disegnare il ciclo nel piano di Clapeyron.
2. Calcolare segno e valore del lavoro nelle tre trasformazioni e quindi il lavoro totale nel ciclo.

Soluzione Esercizio 1

1. Consideriamo un SdR per il quale l'asse delle x coincide col piano inclinato, con direzione positiva verso B, e l'asse delle y è perpendicolare. Sia A l'origine del SdR. Il moto del punto materiale avviene lungo le x. Scrivendo il Secondo Principio della Dinamica lungo le x si ha:

$$m\ddot{x} = F\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu_d N\,, \tag{1}$$

con le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} \dot{x}(t=0) &= v_A\,, &(2)\\ x(t=0) &= 0\,. &(3) \end{aligned}$$

La reazione normale è data da:

$$N = mg\cos\alpha + F\sin\alpha = 227.44\ \mathrm{N}\,. \tag{4}$$

Quindi l'equazione del moto diventa:

$$\ddot{x} = a\,, \tag{5}$$

con

$$a = \frac{F}{m}\cos\alpha - g\sin\alpha - \mu_d\left(g\cos\alpha + \frac{F}{m}\sin\alpha\right) = 3.61\ \mathrm{m\ s^{-2}}\,, \tag{6}$$

che integrata dà:

$$\dot{x}(t) = v_A + at\,, \tag{7}$$

e

$$x(t) = v_A t + \frac{1}{2}at^2\,. \tag{8}$$

In B il punto materiale giunge a t_B, soluzione positiva dell'equazione del secondo ordine:

$$\mathrm{AB} = v_A t_B + \frac{1}{2}at_B^2\,, \tag{9}$$

ovvero

$$t_B^2 + \frac{2v_A}{a}t_B - \frac{2\mathrm{AB}}{a} = 0\,. \tag{10}$$

Si ha

$$t_B = -\frac{v_A}{a} + \sqrt{\frac{v_A^2}{a^2} + \frac{2\mathrm{AB}}{a}} = 1.43\ \mathrm{s}\,. \tag{11}$$

La velocità in B sarà data da

$$v_B = v_A + at_B = 15.16\ \mathrm{m\ s^{-1}}\,. \tag{12}$$

2. Da quando m giunge in B in poi si può utilizzare la conservazione dell'energia meccanica per determinare h_{max}.

   La quota di B è:

$$h_B = \mathrm{AB} \sin \alpha = 9.0 \text{ m} . \tag{13}$$

   L'energia meccanica in B sarà quindi (poniamo lo zero dell'energia potenziale al livello di A):

$$E_B = mgh_B + \frac{1}{2} m v_B^2 . \tag{14}$$

   Il moto del punto lundo l'orizzontale è un moto uniforme, mentre quello lungo la verticale è uniformemente accelerato. Quando il punto materiale giunge alla quota massima la componente verticale della velocità si annulla e rimane quindi solo la componente orizzontale, pari a $v_B \cos \alpha$. Quindi

$$E_{max} = mgh_{max} + \frac{1}{2} m v_B^2 \cos^2 \alpha . \tag{15}$$

   Ponendo $E_B = E_{max}$ si ottiene

$$h_{max} = h_B + \frac{v_B^2}{2g} \sin^2 \alpha = 11.93 \text{ m} . \tag{16}$$

3. Quando il punto tocca terra la sua energia potenziale sarà nulla. Quindi possiamo ottenere la sua energia cinetica sempre dalla conservazione dell'energia:

$$T_0 = E_B = mgh_B + \frac{1}{2} m v_B^2 = 3048.04 \text{ J} . \tag{17}$$

Soluzione Esercizio 2

1. Le possibili reazioni vincolari sono concentrate nel punto O. Durante l'urto la forza di gravità non essendo impulsiva non dà effetti. Se scegliamo come centro di riduzione il punto O, potremo utilizzare il fatto che rispetto ad O il momento angolare si conserva durante l'urto. Inoltre si conserva l'energia cinetica, visto che l'urto è elastico.

   Troviamo la velocità angolare del pendolo composto subito dopo l'urto.

   Il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse perpendicolare al piano in cui avviene il moto e passante per O è dato dalla somma del momento d'inerzia della sbarretta e del disco:

$$I_0 = I_0^{sbarretta} + I_0^{disco} , \tag{18}$$

   dove

$$I_0^{sbarretta} = \frac{1}{3} m_1 L^2 = 0.12 \text{ kg m}^2 , \tag{19}$$

$$I_0^{disco} = \frac{1}{2} M R^2 + M(L+R)^2 = 1.98 \text{ kg m}^2 , \tag{20}$$

e dove il momento d'inerzia del disco è stato calcolato utilizzando il teorema di Huygens-Steiner. Si ha:

$$I_0 = 2.1 \text{ kg m}^2 . \tag{21}$$

La conservazione del momento angolare rispetto ad O ci dice che:

$$m_0 v_0 (L + R) = I_0 \dot{\theta}_0 + m_0 v_1 (L + R) , \tag{22}$$

dove abbiamo preso θ positivo in senso anti orario, v_0 positivo verso destra, e dove abbiamo indicato con v_1 la velocita' del proiettile subito dopo l'urto; questa sarà diretta sempre orizzontalmente, per la simmetria del problema, ma non ne conosciamo ancora il verso.

L'equazione (22) ha due incognite, v_1 e $\dot{\theta}$. Quindi abbiamo bisogno di un'altra equazione per risolvere il problema: la conservazione dell'energia.

La conservazione dell'energia ci dà:

$$\frac{1}{2} m_0 v_0^2 = \frac{1}{2} m_0 v_1^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_0^2 . \tag{23}$$

Dall'Eq. (22) si ricava:

$$v_1 = v_0 - \frac{I_0}{m_0 (L + R)} \dot{\theta}_0 , \tag{24}$$

che sostituita nella (23) dà:

$$\begin{aligned} v_0^2 &= \left(v_0 - \frac{I_0}{m_0 (L + R)} \dot{\theta}_0 \right)^2 + \frac{I_0}{m_0} \dot{\theta}_0^2 , & (25) \\ &= v_0^2 - 2 \frac{v_0 I_0}{m_0 (L + R)} \dot{\theta}_0 + \frac{I_0^2}{m_0^2 (L + R)^2} \dot{\theta}_0^2 + \frac{I_0}{m_0} \dot{\theta}_0^2 , & (26) \end{aligned}$$

ovvero:

$$\dot{\theta}_0 \left\{ \dot{\theta}_0 \left[\frac{I_0}{m_0} \left(1 + \frac{I_0}{m_0 (L + R)^2} \right) \right] - 2 \frac{v_0 I_0}{m_0 (L + R)} \right\} = 0 . \tag{27}$$

L'Eq. (27) ammette una soluzione non fisica, $\dot{\theta}_0 = 0$, e un'altra fisica:

$$\dot{\theta}_0 = 2 \frac{v_0 m_0 (L + R)}{I_0 + m_0 (L + R)^2} = 0.64 \text{ s}^{-1} . \tag{28}$$

Subito dopo l'urto, il pendolo composto si muove liberamente sotto l'azione della forza di gravità, che è conservativa. Per calcolare l'ampiezza massima delle oscillazioni indotte dall'urto, quindi, si può utilizzare la conservazione dell'energia meccanica applicata al pendolo. All'istante $t = 0$ l'energia potenziale del pendolo la prendiamo nulla, mentre la sua energia cinetica è:

$$T_0 = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_0^2 . \tag{29}$$

L'ampiezza massima sarà determinata dall'avere energia cinetica nulla. Quindi l'energia meccanica si sarà tramutata tutta in energia potenziale. Per calcolare l'energia potenziale del pendolo composto possiamo sommare le energie potenziali dei due pezzi che compongono il sistema. Per l'asta abbiamo:

$$\Delta V_{asta} = m_1 g \Delta h_{asta}\,, \tag{30}$$

dove

$$\Delta h_{asta} = \frac{L}{2}(1-\cos\theta_{max})\,. \tag{31}$$

Per il disco abbiamo:

$$\Delta V_{disco} = Mg(L+R)(1-\cos\theta_{max})\,. \tag{32}$$

In totale:

$$\frac{1}{2}I_0\dot{\theta}_0^2 = \left[m_1 g\frac{L}{2} + Mg(L+R)\right](1-\cos\theta_{max})\,, \tag{33}$$

ovvero

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{I_0\dot{\theta}_0^2}{g\left[m_1 L + 2M(L+R)\right]}\,, \tag{34}$$

e infine:

$$\theta_{max} = 0.168 \text{ rad} = 9.6^\circ\,. \tag{35}$$

2. L'equazione del moto del pendolo composto dopo l'urto è:

$$I_0\ddot{\theta} = -(m_1+M)gL_G\sin\theta\,, \tag{36}$$

dove L_G è la distanza da O del centro di massa del sistema[1]:

$$L_G = \frac{1}{m_1+M}\left[m_1\frac{L}{2} + M(L+R)\right] = 0.62 \text{ m}\,. \tag{37}$$

Siccome $\theta_{max} = 0.168$ rad, l'approssimazione delle piccole oscillazioni è giustificata. Quindi $\sin\theta \simeq \theta$ e l'eq del moto diventa quella dell'oscillatore armonico:

$$\ddot{\theta} + \frac{(m_1+M)gL_G}{I_0}\theta = 0\,. \tag{38}$$

Il periodo delle piccole oscillazioni è quindi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{(m_1+M)gL_G}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{g\left[m_1\frac{L}{2} + M(L+R)\right]}} = 1.65 \text{ s}\,. \tag{39}$$

[1] Nota che il cm sta all'interno del disco, a 2 cm dal bordo, sul prolungamento della sbarretta.

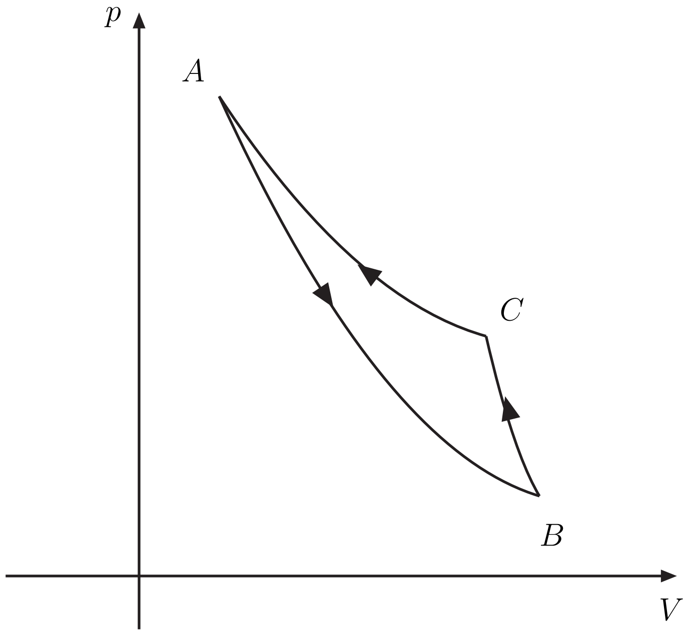
3. Utilizzando l'Eq. (28) si può trovare v_1 dalla (24):

$$v_1 = v_0 \left(1 - \frac{2I_0}{I_0 + m_0(L+R)^2} \right) = -4.55 \text{ m s}^{-1} . \tag{40}$$

Dall'Eq. (40) si capisce che v_1 può essere positiva o negativa a seconda del valore del momento d'inerzia del pendolo composto I_O rispetto al termine $m_0(L+R)^2$. Si ha infatti che $v_1 > 0$ se $I_0 < m_0(L+R)^2$ e $v_1 < 0$ viceversa. Nel nostro caso si ha $v_1 < 0$, cioè il proiettile rimbalza sul disco e torna indietro, comunicando parte della sua energia cinetica al pendolo composto, che comincia ad oscillare.

Soluzione Esercizio 3

1. Il ciclo nel piano di Clapeyron è:



2. Lungo l'adiabatica AB si ha $\not{d}Q = 0$ e quindi per il Primo Principio:

$$L_{AB} = U(A) - U(B) = \tilde{c}_V(T_A - T_B) = \frac{3}{2}R(T_B - T_A) = 3116.25 \text{ J} , \tag{41}$$

dove abbiamo indicato con $\tilde{c}_V$ il calore specifico molare a volume costante.

La trasformazione BC è data dalla curva

$$p = \frac{cost}{V^2} , \tag{42}$$

dove la costante può essere determinata imponendo che la curva passi per B:

$$cost = p_B V_B^2 . \tag{43}$$

Il lavoro L_{BC} sarà dato dal seguente integrale:

$$L_{BC} = \int_{V_B}^{V_C} p\,dV = p_B V_B^2 \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V^2} = p_B V_B^2 \left(-\frac{1}{V_C} + \frac{1}{V_B} \right) = p_B V_B \left(1 - \frac{V_B}{V_C} \right) . \tag{44}$$

Utilizzando l'equazione di stato del gas perfetto in B ($p_B V_B = RT_B$) si ottiene

$$L_{BC} = RT_B \left(1 - \frac{V_B}{V_C} \right) . \tag{45}$$

Per determinare il rapporto V_B/V_C consideriamo il fatto che si ha

$$p_B V_B^2 = p_C V_C^2 \,, \tag{46}$$

e quindi

$$\frac{p_B V_B^2}{p_C V_C^2} = 1 \,. \tag{47}$$

D'altra parte, le equazioni di stato danno

$$p_B V_B = RT_B \,, \qquad p_C V_C = RT_C = 2RT_B \,. \tag{48}$$

Quindi

$$1 = \frac{p_B V_B^2}{p_C V_C^2} = \frac{V_B\, RT_B}{V_C\, RT_C} = \frac{V_B}{2V_C} \,, \tag{49}$$

da cui

$$\frac{V_B}{V_C} = 2 \,. \tag{50}$$

Infine

$$L_{BC} = RT_B \left(1 - \frac{V_B}{V_C} \right) = -RT_B = -2077.5 \text{ J} \,. \tag{51}$$

L'ultimo tratto è costituito da una trasformazione isoterma. Quindi

$$L_{CA} = \int_{V_C}^{V_A} p\,dV = RT_A \log \left(\frac{V_A}{V_C} \right) = -RT_A \frac{1}{2} \log (2) = -1440.01 \text{ J} \,. \tag{52}$$

Il lavoto totale del ciclo quindi è:

$$L_{tot} = -401.26 \text{ J} \,. \tag{53}$$

Compito 9 Settembre 2016

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

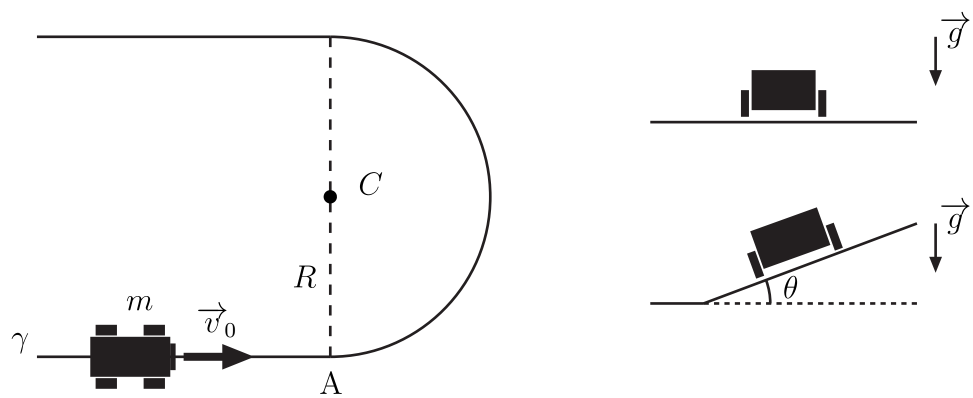
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Anno Accademico 2015-2016

Compito di Fisica Generale I per matematici
9 Settembre 2016

R. Bonciani, P. Dore

Esercizio 1



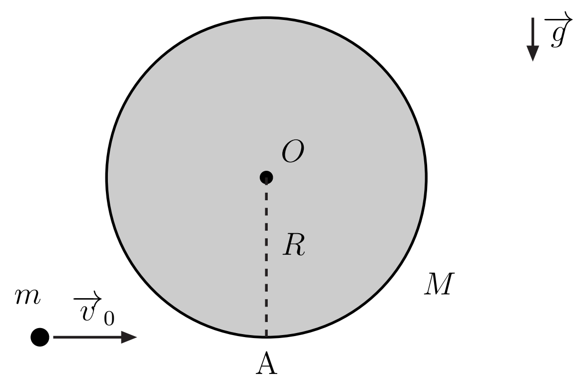
Un'auto (che per i nostri scopi può essere approssimata ad un punto materiale) di massa m procede di moto uniforme sulla traiettoria piana γ (vedi figura di sinistra, dove la traiettoria piana è vista dall'alto) con velocità in modulo pari a v_0. In A entra in una curva semicircolare di raggio R e centro C.

1. Supponendo che il fondo stradale lungo la curva sia orizzontale (vedi figura in alto a destra), quale deve essere il coefficiente d'attrito minimo μ_0 affinché l'auto rimanga, senza derapare, sulla curva?

2. Supponiamo adesso che il coefficiente d'attrito fra auto e asfalto sia μ_1 e che il modulo della velocità alla quale l'auto procede sia v_1. Trovare la pendenza minima della strada lungo la curva che faccia in modo da far percorrere all'auto la curva stessa.

Dati numerici: $v_0 = 1$ m/s, $R = 60$ cm, $m = 1$ kg, $\mu_1 = 0.2$, $v_1 = 2$ m/s.

Esercizio 2



Un disco omogeneo di massa M, raggio R è vincolato a ruotare senza attrito attorno al centro O, su un piano verticale, in presenza di gravità ed è fermo quando viene urtato anelasticamente da un proiettile di massa m e velocità $\vec{v}_0$, diretta come in figura. Nell'urto, il proiettile si conficca sul bordo del disco, nel punto A, a distanza R dal centro O e lungo la verticale che passa per O e non se ne distacca più.

1. Si calcoli la velocità angolare del sistema disco + proiettile subito dopo l'urto anelastico.

2. Qual'è il valore minimo di v_0, v_{0min}, affinché il sistema compia dopo l'urto una rotazione di almeno π (proiettile che raggiunge la posizione verticale)?

Dati numerici: $v_0 = 10\ m/s$, $R = 60$ cm, $m = 0.1$ kg, $M = 1$ kg.

Esercizio 3

Una massa di 9 g d'acqua (corrispondente ad un numero di moli $n = 0.5$) alla temperatura iniziale di $T_i = 20$°C viene trasformata in vapore alla temperatura finale $T_f = 300$°C. Definendo la temperatura intermedia $T_0 = 100$°C, si assumano i seguenti punti:

- tutte le trasformazioni avvengono a pressione atmosferica (costante);

- nel riscaldamento fra T_i e T_0 l'acqua non varia apprezzabilmente di volume ed il suo calore specifico rimane costante, pari a $c_V = 1$ cal/(g °K);

- a T_0 il calore latente di evaporazione dell'acqua è $\lambda = 328$ cal/g;

- nel riscaldamento fra T_0 e T_f il calore specifico molare del vapore acqueo a pressione costante varia secondo la legge $c_p = a + bT + cT^2$, dove $a = 8.8$ cal/(mol °K), $b = -1.9\ 10^{-3}$ cal/(mol °K^2), $c = -2.2\ 10^{-6}$ cal/(mol °K^3).

Calcolare:

1. le quantità di calore Q_1, Q_2, Q_3 scambiate dal sistema nelle tre trasformazioni;

2. la variazione di entropia del sistema nel passaggio da T_i a T_f.

Soluzione Esercizio 1

1. La forza centripeta che tiene l'auto sulla curva circolare è la forza d'attrito statico e deve avere modulo

$$f_c = m\frac{v_0^2}{R} = 1.67 \text{ N}. \tag{1}$$

Siccome si tratta di attrito statico, si ha

$$f_c \leq \mu_S N, \tag{2}$$

dove $N = mg$. In totale

$$m\frac{v_0^2}{R} \leq \mu_S N = \mu_S mg, \tag{3}$$

e quindi

$$\mu_S \geq \mu_{S\,min} = \frac{v_0^2}{gR} = 0.17. \tag{4}$$

2. Conviene ragionare in un sistema di riferimento (non inerziale) centrato in C e che ruoti solidalmente all'auto. In tale sistema dobbiamo imporre l'annullarsi delle forze che agiscono sull'auto. Prendiamo l'asse delle x orizzontale con verso uscente da C e l'asse delle y verticale. Abbiamo:

$$f_c - N\sin\theta - f_t\cos\theta = 0, \tag{5}$$
$$N\cos\theta - mg - f_t\sin\theta = 0. \tag{6}$$

La situazione di minimo θ corrisponde all'avere la forza d'attrito (statico) al suo massimo valore

$$f_t = \mu_1 N. \tag{7}$$

Inoltre si ha

$$f_c = m\frac{v_1^2}{R} = 6.67 \text{ N}. \tag{8}$$

Risolviamo il sistema (5,6) per ottenere N e θ. Dalla seconda equazione otteniamo

$$N = \frac{mg}{\cos\theta - \mu_1\sin\theta}, \tag{9}$$

che sostituita nella prima dà

$$f_c - mg\frac{\sin\theta + \mu_1\cos\theta}{\cos\theta - \mu_1\sin\theta} = 0. \tag{10}$$

Escludiamo il valore per cui si annulla il denominatore della (10):

$$\tan\theta = \frac{1}{\mu_1} = 5, \tag{11}$$

ovvero

$$\theta \neq \arctan 5 = 1.37 = 78.69^\circ. \tag{12}$$

Poniamo

$$K_c = \frac{f_c}{mg} = 0.68\,. \tag{13}$$

L'Eq. (10) diventa

$$K_c - \frac{\sin\theta + \mu_1 \cos\theta}{\cos\theta - \mu_1 \sin\theta} = 0\,, \tag{14}$$

ovvero

$$(K_c - \mu_1)\cos\theta - (K_c\mu_1 + 1)\sin\theta = 0\,, \tag{15}$$

che ammette la soluzione

$$\theta = \arctan\frac{(K_c - \mu_1)}{(K_c\mu_1 + 1)} = 0.40 = 22.91^\circ\,, \tag{16}$$

che rispetta il vincolo in Eq. (12).

Soluzione Esercizio 2

1. L'urto è anelastico e quindi l'unica cosa che si conserva durante l'urto è il momento angolare rispetto a O. In O, infatti, sono concentrate le possibili reazioni vincolari e prendendo O come centro di riduzione, queste non danno contributo. Prima dell'urto si ha

$$L_i = mv_0R\,, \tag{17}$$

e dopo l'urto si ha

$$L_f = I_0\omega_0 + mR^2\omega = (I_O + mR^2)\omega\,, \tag{18}$$

dove il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse perpendicolare al piano del moto passante per il centro O è:

$$I_O = \frac{1}{2}MR^2\,. \tag{19}$$

Siccome $L_i = L_f$, si trova:

$$\omega = \frac{m\,v_0R}{(I_0 + mR^2)} = \frac{2m\,v_0}{(M+2m)R} = 2.78\ \mathrm{s}^{-1}\,. \tag{20}$$

2. Dopo l'urto il sistema è unito e parte con velocità angolare pari ad ω_0. Siccome il vincolo è liscio e l'unica forza in gioco è la forza peso, che è conservativa, si può usare la conservazione dell'energia per determinare il valore minimo di v_0.

All'istante iniziale abbiamo solo energia cinetica

$$E_i = T_0 = \frac{1}{2}\tilde{I}_0\omega_0^2\,, \tag{21}$$

dove

$$\tilde{I}_0 = I_0 + mR^2 = \left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2\,. \tag{22}$$

Possiamo prendere come valore minimo di v_0, e quindi di ω_0, quello che fa sì che il sistema si fermi esattamente dopo aver fatto un giro di π. In quella situazione l'energia cinetica è nulla e abbiamo solo energia potenziale. Il disco non subisce variazioni di energia potenziale, quindi è solo la massa m a dover essere contata:

$$E_f = V_\pi = 2mgR\,. \tag{23}$$

Per cui

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M + m\right) R^2 \omega_{0\,min}^2 = 2mgR\,. \tag{24}$$

Si ricava allora:

$$\omega_{0\,min} = \pm\sqrt{\frac{8mg}{(M+2m)R}} = 3.3\ \mathrm{s}^{-1} \tag{25}$$

dove abbiamo scelto il senso positivo come antiorario, e si deve avere $\omega > \omega_{0\,min}$.

Usando l'Eq. (20), si ha quindi:

$$v_{0\,min} = \frac{(M+2m)R}{2m}\omega_{0\,min} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2gR(M+2m)}{m}} = 11.89\ \mathrm{m/s}\,. \tag{26}$$

Soluzione Esercizio 3

Dividiamo il processo in tre parti: *i)* l'acqua viene portata dalla temperatura T_i alla temperatura T_0; *ii)* tutta la quantità d'acqua presente subisce una transizione di fase da liquido a vapore, alla temperatura T_0; *iii)* una volta che tutta l'aqua è evaporata, il vapore passa dalla temperatura T_0 alla T_f.

- *i)* Durante la prima trasformazione il volume dell'acqua non varia apprezzabilmente. Quindi non si fa lavoro meccanico e tutta l'energia spesa per riscaldare l'acqua va sotto forma di energia interna dell'acqua stessa. Si ha

$$Q_1 = \int_{T_i}^{T_0} mc_V\,dT = mc_V(T_0 - T_i) = 720\ \mathrm{cal} = 3014\ \mathrm{J}\,. \tag{27}$$

- *ii)* La seconda trasformazione è una transizione di fase. Dato quindi il calore latente λ, si ha

$$Q_2 = \lambda m = 2952\ \mathrm{cal} = 12356\ \mathrm{J}\,. \tag{28}$$

- *iii)* Nella terza trasformazione si riscalda il gas tenendolo a pressione costante. La quantità di calore fornita sarà quindi

$$\begin{aligned} Q_3 &= \int_{T_0}^{T_f} nc_p(T)\,dT = n\int_{T_0}^{T_f}(a + bT + cT^2)\,dT \\ &= na(T_f - T_0) + \frac{1}{2}nb(T_f^2 - T_0^2) + \frac{1}{3}nc(T_f^3 - T_0^3) = 740\ \mathrm{cal} = 3098\ \mathrm{J} \end{aligned} \tag{29}$$

Per quanto riguarda le entropie, quindi, abbiamo:

$$\Delta S_1 = \int_{T_i}^{T_0} \frac{đQ}{T} = mc_V \int_{T_i}^{T_0} \frac{dT}{T} = mc_V \ln \frac{T_0}{T_i} = 2.17 \text{ cal/}^\circ\text{K} = 9.09 \text{ J/}^\circ\text{K}\,, \tag{30}$$

$$\Delta S_2 = \frac{Q_2}{T_0} = 7.91 \text{ cal/}^\circ\text{K} = 33.11 \text{ J/}^\circ\text{K}\,, \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\Delta S_3 &= \int_{T_0}^{T_f} \frac{đQ}{T} = \int_{T_0}^{T_f} nc_p(T)\,\frac{dT}{T} = n\int_{T_0}^{T_f} \left(\frac{a}{T} + b + cT\right)\,dT \\ &= na \ln \frac{T_f}{T_0} + nb(T_f - T_0) + \frac{1}{2}nc(T_f^2 - T_0^2) = 1.59 \text{ cal/}^\circ\text{K} = 6.68 \text{ J/}^\circ\text{K}\,,\end{aligned} \tag{32}$$

e quindi

$$\Delta S_{if} = 11.67 \text{ cal/}^\circ\text{K} = 48.88 \text{ J/}^\circ\text{K}\,. \tag{33}$$

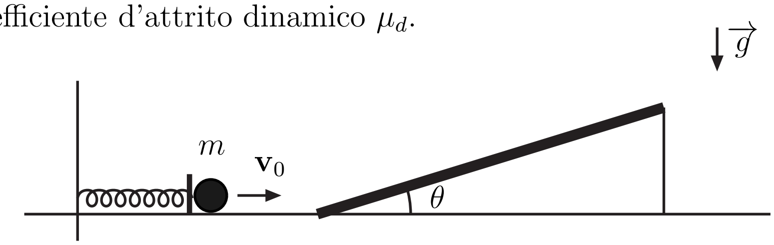
Esonero 14 Novembre 2016

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2016-2017

Esercizio 1

Un corpo di massa m è inizialmente fermo su un piano orizzontale liscio, appoggiato ad una molla ideale di costante elastica k, compressa di un tratto L e tenuta ferma da un opportuno sistema di bloccaggio. Quando il blocco viene rimosso, la massa m viene sparata con velocità v_0 verso un piano, inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale, scabro (rappresentato in figura da una linea in grassetto). All'istante $t = t_0$ la massa m comincia a salire sul piano inclinato sempre con velocità in modulo pari a v_0 e viene frenata da una forza d'attrito con coefficiente d'attrito dinamico μ_d.

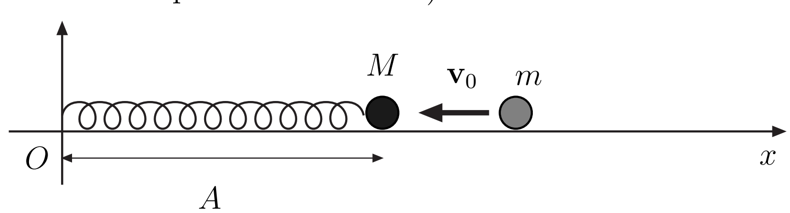


1. Calcolare la velocità v_0.
2. Calcolare la distanza d percorsa da m sul piano inclinato prima di fermarsi all'istante $t = t_1$.
3. Calcolare l'intervallo di tempo $t_1 - t_0$.
4. Calcolare il valore minimo del coefficiente d'attrito statico μ_s per il quale il corpo rimane fermo dopo la salita.

Valori numerici: $\mu_d = 0.3$, $m = 0.5$ kg, $k = 60$ N/m, $L = 10$ cm, $\theta = \pi/6$.

Esercizio 2

Un corpo di massa M è posto su un piano orizzontale liscio ed oscilla intorno al punto O per effetto di una molla, di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla, con ampiezza di oscillazione A. Nell'istante di massima estensione $x(t) = A$ (velocità nulla) arriva un proiettile di massa m e velocità v_0 ed urta, in maniera completamente anelastica, il blocco M, rimanendo attaccato ad M e formando un unico corpo di massa $m+M$. (NB.: nell'urto istantaneo la posizione del corpo M non cambia.)



1. Si calcoli la velocità v_1 del corpo $m + M$ subito dopo l'urto.
2. Si calcoli la nuova ampiezza di oscillazione del corpo $m + M$.

Valori numerici: $A = 20$ cm, $M = 0.5$ kg, $m = 0.1$ kg, $k = 450$ N/m, $v_0 = 18$ m/s.

1 Soluzione Esercizio 1

1. Il corpo di massa m ha inizialmente energia potenziale pari a

$$V_0 = \frac{1}{2}kL^2\,. \tag{1}$$

Quando il blocco viene rimosso, l'energia V_0 viene trasformata in energia cinetica. Al momento del distacco della massa m dal supporto, m ha velocità massima, l'energia potenziale è nulla e quindi si ha solamente energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}mv_0^2\,, \tag{2}$$

da cui

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}L = 1.1 \text{ m s}^{-1}\,. \tag{3}$$

2. Quando m comincia a salire sul piano inclinato ha energia cinetica iniziale

$$T_i = \frac{1}{2}mv_0^2\,. \tag{4}$$

Percorsa la distanza d il corpo si ferma. Quindi l'energia cinetica finale è

$$T_f = 0\,. \tag{5}$$

Utilizziamo il teorema delle forze vive: il lavoro L delle forze agenti sul corpo sarà dato dalla differenza di energia cinetica

$$L = T_f - T_i = -\frac{1}{2}mv_0^2\,. \tag{6}$$

D'altra parte, le forze che agiscono sul corpo sono la forza peso, che è conservativa, e la forza d'attrito. Il lavoro fatto da queste forze è facilmente calcolabile come segue:

$$L = V_i - V_f + \int_0^d \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{r}\,. \tag{7}$$

Poniamo lo zero dell'energia potenziale sul piano orizzontale. L'energia potenziale iniziale, V_i è allora nulla. L'energia potenziale finale è data da

$$V_f = mgh = mgd\sin\theta\,. \tag{8}$$

Per calcolare l'integrale del lavoro fatto dalla forza d'attrito, dobbiamo considerare che

$$F_t = \mu_d N\,, \tag{9}$$

dove N è il modulo della reazione normale del vincolo. Questa è data dalla componente perpendicolare al vincolo della forza peso agente sul corpo:

$$N = mg\cos\theta\,. \tag{10}$$

Allora:

$$\int_0^d \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{r} = -\mu_d mg\cos\theta \int_0^d d\xi = -\mu_d mgd\cos\theta \,. \tag{11}$$

Uguagliando le equazioni (6) e (7), tenendo conto delle (8) e (11), si ha

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -mgd\sin\theta - \mu_d mgd\cos\theta = -mgd(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)\,, \tag{12}$$

da cui si ricava

$$d = \frac{v_0^2}{2g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)} = 8.1 \text{ cm}\,. \tag{13}$$

3. Il moto di m sul piano inclinato è uniformemente decelerato. Le forze che agiscono sul corpo sono la forza peso e la reazione vincolare, che può essere scomposta in una reazione normale al vincolo e una tangenziale (la forza d'attrito vera e propria). Lungo la direzione perpendicolare al vincolo possiamo imporre l'annullarsi delle forze agenti sul corpo e ottenere

$$N = mg\cos\theta\,. \tag{14}$$

Lungo la direzione tangente al piano inclinato si ha

$$m\ddot{x} = -mu_d mg\cos\theta - mg\sin\theta = -mg(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)\,, \tag{15}$$

da cui

$$\ddot{x} = -g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta) = -a = -7.45 \text{ m s}^{-2}\,. \tag{16}$$

Quindi il tempo impiegato per fermarsi in d è dato da

$$\dot{x} = v_0 - at_1 = 0\,, \tag{17}$$

ovvero

$$t_1 = \frac{v_0}{a} = 0.15 \text{ s}\,. \tag{18}$$

4. Quando il corpo si ferma, affinché rimanga fermo per effetto dell'attrito si deve avere che la risultante lungo la direzione del piano inclinato sia nulla, ovvero che

$$F_t = mg\sin\theta\,, \tag{19}$$

quando lungo la direzione perpendicolare si ha

$$N = mg\cos\theta\,. \tag{20}$$

Siccome il modulo della forza d'attrito è legata alla componente normale della reazione vincolare dalla relazione

$$F_t \le \mu_s N\,, \tag{21}$$

si ha

$$F_t \le \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta\,. \tag{22}$$

Si trova quindi che il coefficiente d'attrito statico deve soddisfare la seguente diseguaglianza

$$mg\sin\theta \leq \mu_s mg\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad \mu_s \geq \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.58\,, \tag{23}$$

cioè deve essere maggiore di $1/\sqrt{3}$, che è il valore minimo affinché si possa avere equilibrio. Se μ_d fosse minore di tale valore, non si potrebbe avere equilibrio e il corpo arrivato a d tornerebbe indietro scivolando sul piano inclinato.

2 Soluzione Esercizio 2

Si può dividere il moto del sistema in due parti: l'urto, che dà le condizioni iniziali del moto successivo, e il moto dopo l'urto che non è altro che un moto aromico di una massa composta $m + M$.

1. Durante l'urto dobbiamo considerare il fatto che la forza elastica cui è sottoposta la massa M non è impulsiva. Le altre due forze che agiscono sui corpi, la forza peso e la reazione vincolare normale al vincolo, non intervengono durante l'urto, che si svolge lungo le x. Quindi possiamo considerare la conservazione della quantità di moto lungo le x. L'energia invece non si conserva, esserdo l'urto totalmente anelastico.

   Si ha allora che la quantità di moto del sistema subito prima dell'urto sarà la stessa del sistema subito dopo l'urto. Prendendo le x positive verso destra, abbiamo

   $$-mv_0 = -(m+M)v_1\,, \tag{24}$$

   da cui si ricava la velocità di $(m + M)$ subito dopo l'urto:

   $$v_1 = \frac{m}{m+M}v_0 = 3.0\ \mathrm{m\,s^{-1}}\,. \tag{25}$$

2. Subito dopo l'urto, abbiamo quindi un moto armonico di una massa $m+M$ che parte da $x(0) = A$ con velocità iniziale in modulo pari a $v_1 = 3$ m/s (verso negativo).

   Per trovare la nuova ampiezza di oscillazione basta considerare la conservazione dell'energia meccanica, che adesso vale. Possiamo calcolare l'energia meccanica proprio all'istante $t = 0$, in cui l'energia cinetica del sistema è data da

   $$T = \frac{1}{2}(m+M)v_1^2\,, \tag{26}$$

   mentre l'energia potenziale è data da

   $$V = \frac{1}{2}kA^2\,. \tag{27}$$

   La nuova ampiezza di oscillazione A' sarà tale che quando il sistema arriva a $x = A'$ la velocità è nulla e l'energia meccanica è tutta energia potenziale

   $$V = \frac{1}{2}kA'^2\,. \tag{28}$$

Uguagliando l'energia in $t = 0$ e quella all'elongazione massima si ottiene un'espressione per A':

$$\frac{1}{2}(m+M)v_1^2 + \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kA'^2\,, \tag{29}$$

ovvero

$$A' = \pm\sqrt{A^2 + \frac{(m+M)}{k}v_1^2}\,, \tag{30}$$

con

$$\sqrt{A^2 + \frac{(m+M)}{k}v_1^2} = \sqrt{A^2 + \frac{v_1^2}{\omega'^2}} = 22.8\ \mathrm{cm}\,. \tag{31}$$

Esonero 19 Gennaio 2017

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2016-2017

Esonero 2 - Fisica Generale I
19 Gennaio 2017

R. Bonciani, P. Dore

Il presente esonero NON sarà considerato superato se il punteggio di 15/30 sarà raggiunto con la sola parte di meccanica o la sola parte di termodinamica. È obbligatorio affrontarle entrambe.

Esercizio 1

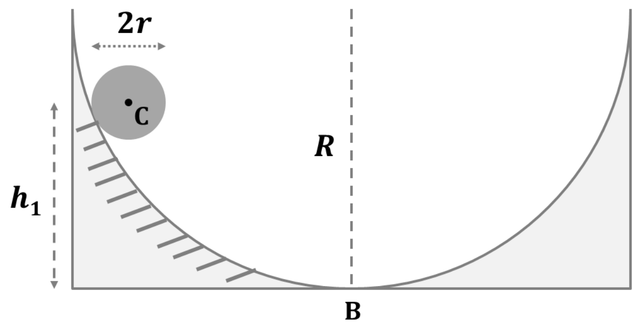
Un disco di centro C, raggio r e massa m si trova su una guida semicircolare di raggio R, come mostrato in figura. Inizialmente un blocco mantiene il disco fermo nella posizione in cui C si trova ad una quota h_1 rispetto al punto B, sul fondo della guida. Rimosso il blocco, il disco inizia un moto di rotolamento puro verso il basso, garantito da un opportuno attrito. Arrivato in B, il disco inizia a risalire la seconda parte della guida, che è priva di attrito. Calcolare:

a. la velocità v_B del punto C quando il disco transita per B;

b. la reazione normale N della guida quando il disco transita per B;

c. la quota massima h_2 raggiunta dal punto C nella risalita.

Valori numerici: $r = 12$ cm; $m = 150$ g; $R = 60$ cm; $h_1 = 48$ cm.



Esercizio 2

Una macchina termica reale funziona fra una sorgente fredda a temperatura $T_f = 0°\text{C}$ ed una calda a temperatura $T_c = 350°\text{C}$. Il suo rendimento η è pari al 25% di quello η_c della macchina ideale di Carnot funzionante fra le stesse sorgenti ed il lavoro meccanico che produce in un ciclo è pari a $L_0 = 2715$ J. Sapendo che la sorgente fredda è costituita da una miscela di acqua e ghiaccio, calcolare la massa di ghiaccio che viene fuso in un ciclo.

Soluzione esercizio 1

a. Durante il moto di rotolamento puro in discesa le forze di attrito non compiono lavoro sul disco, quindi la sua energia meccanica si conserva:

$$mgh_1 = mgr + \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2 \tag{1}$$

dove $I = \frac{1}{2}mr^2$ è il momento d'inerzia del disco e $\omega_B = v_B/r$ la sua velocità angolare quando transita per B. Sostituendo si ricava quindi:

$$v_B = \sqrt{\frac{4}{3}g(h_1 - r)} = 2.17\,\mathrm{m/s} \tag{2}$$

b. Quando il disco transita in B, il punto C si sta muovendo di moto circolare di raggio $R - r$, quindi la risultante delle forze lungo la direzione verticale è la forza centripeta del moto:

$$N - mg = m\frac{v_B^2}{R - r} = \frac{4}{3}mg\frac{h_1 - r}{R - r} \tag{3}$$

da cui:

$$N = mg\left(1 + \frac{4}{3}\frac{h_1 - r}{R - r}\right) = 2.94\,\mathrm{N} \tag{4}$$

c. Durante la risalita in assenza di attrito la velocità angolare del disco rimane invariata, quindi la conservazione dell'energia meccanica è espressa da:

$$mgh + \frac{1}{2}I\omega_B^2 = mgr + \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2 \tag{5}$$

da cui, sostituendo l'espressione per v_B ricavata nel punto *a*, si ottiene:

$$h = r + \frac{2}{3}(h_1 - r) = \frac{2}{3}h_1 + \frac{1}{3}r = 36\,\mathrm{cm} \tag{6}$$

Soluzione esercizio 2

Il rendimento η_c del ciclo di Carnot tra le temperature $T_f = 273$ K e $T_c = 623$ K vale:

$$\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 0.56 \tag{7}$$

e quindi il rendimento della macchina termica reale vale:

$$\eta = \frac{L_0}{|Q_{ass}|} = \frac{1}{4}\eta_c = 0.14 \tag{8}$$

da cui si ricavano il calore assorbito e quello ceduto dalla macchina durante il ciclo:

$$\begin{cases} |Q_{ass}| = \frac{L_0}{\eta} = 19393\,\mathrm{J} \\ |Q_{ced}| = |Q_{ass}| - L_0 = 16678\,\mathrm{J} \end{cases} \tag{9}$$

Infine, poiché il calore assorbito dal ghiaccio è uguale a quello ceduto dalla macchina ($Q_G = \lambda m = |Q_{ced}|$) e il calore latente di fusione del ghiaccio vale $\lambda_f = 333.5$ J/g, la massa del ghiaccio fuso è data da:

$$m = \frac{Q_G}{\lambda_f} = 50\,\mathrm{g} \tag{10}$$

Esame 3 Febbraio 2017

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2016-2017

Regole per lo scritto:

- RECUPERO 1° ESONERO: risolvere gli esercizi 1 e 2 in 2h.
- RECUPERO 2° ESONERO: risolvere gli esercizi 3 e 4 in 2h.
- COMPITO: risolvere gli esercizi 1, 3 e 4 in 3h.

Esame - Fisica Generale I
3 Febbraio 2017

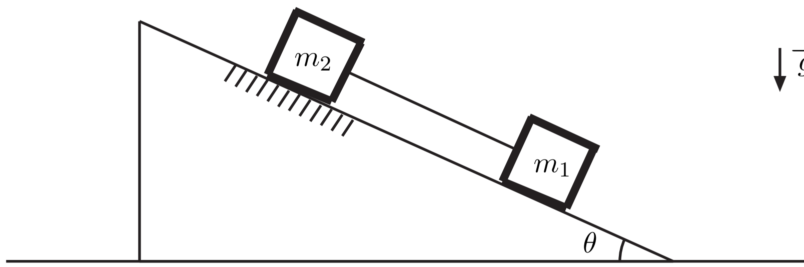
R. Bonciani, P. Dore

Regole per lo scritto

- RECUPERO 1° ESONERO: risolvere gli esercizi 1 e 2 in 2h.
- RECUPERO 2° ESONERO: risolvere gli esercizi 3 e 4 in 2h.
- COMPITO: risolvere gli esercizi 1, 3 e 4 (contrassegnati con $*$) in 3h.

Esercizio 1 $*$

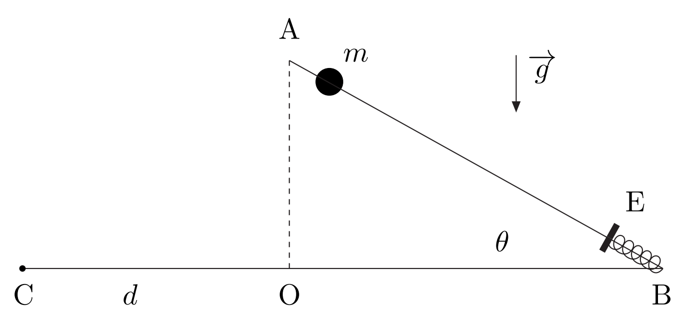
Due corpi di massa $m_1 = 3$ kg e $m_2 = 1$ kg, posti su un piano inclinato di un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale, sono legati fra loro da una fune ideale. Il corpo m_1 è libero di scorrere senza attrito sul piano inclinato, mentre fra m_2 e il piano c'è attrito con coefficiente $\mu_d = 0.3$.



1. Calcolare l'accelerazione di m_2.
2. Se ad m_2 viene applicata una forza costante e in direzione parallela al piano, calcolare il valore di F per il quale il sistema si muove verso l'alto con velocità costante.
3. Calcolare il valore della tensione della fune nei due casi.

Esercizio 2

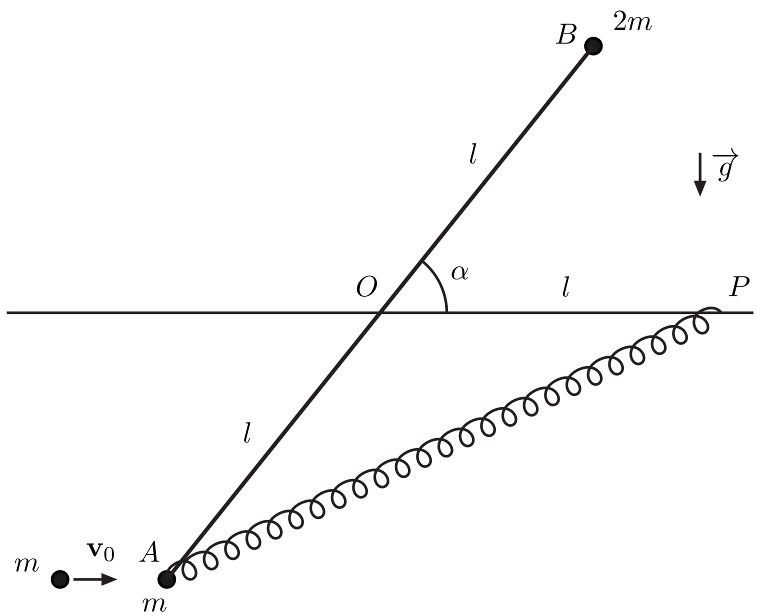
Un anellino di massa $m = 200$ g viene infilato in una guida filiforme scabra AB di lunghezza $L = 1$ m, aperta all'estremo A e inclinata di $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Fra anello e guida c'è attrito dinamico con coefficiente $\mu_d = 0.2$. In fondo alla guida è posta una molla di costante elastica $k = 90$ N/m e lunghezza di riposo $l_0 = 30$ cm. All'istante iniziale la molla è in equilibrio ($EB = l_0$). L'anello parte da A con una velocità iniziale di modulo $v_0 = 5$ m/s, diretta lungo la guida verso il punto B.



1. Calcolare la compressione massima della molla Δl.
2. Calcolare la velocità v_1 con cui l'anello ritorna in A dopo essere stato respinto verso l'alto dalla molla.
3. Calcolare la distanza d da O a cui cade l'anello (dopo aver lasciato il punto A, il moto dell'anello prosegue nel vuoto).

Esercizio 3 $*$

Un manubrio è costituito da un'asta omogenea e da due punti materiali fissati ai suoi estremi A e B. L'asta, che ha massa $m = 40$ g e lunghezza $2l$, con $l = 20$ cm, è incernierata nel suo punto medio O, fissato su un piano verticale, attorno al quale può ruotare senza attrito. Il punto materiale fissato in A ha massa m, mentre quello in B ha massa $2m$. Una molla ideale di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile ($l_0 = 0$) collega l'estremità A al punto P sull'asse orizzontale passante per O. Il punto P dista l da O.



1. Inizialmente il sistema è in equilibrio e l'asta forma un angolo $\alpha = \pi/3$ con l'asse orizzontale OP. Calcolare la costante elastica della molla.
2. A $t = 0$ un punto materiale di massa m urta il punto A con velocità $\mathbf{v}_0$ diretta orizzontalmente come in figura e di modulo $v_0 = 10$ m/s. L'urto è perfettamente anelastico e avviene in un tempo trascurabile. Calcolare la velocità angolare dell'asta immediatamente dopo l'urto.

Esercizio 4 $*$

Due moli di gas perfetto biatomico compiono il seguente ciclo: dallo stato iniziale A con $p_A = 2$ atm e $V_A = 10$ l il sistema compie una trasformazione IRREVERSIBILE che lo porta nello stato B, con $p_B = 2p_A$ e $V_B = V_A/2$; una isobara REVERSIBILE porta poi il sistema nello stato C, con $V_C = V_A$ e infine il sistema torna nello stato A con una trasformazione isocora REVERSIBILE. Il lavoro totale compiuto nel ciclo è $L_{TOT} = 15$ l·atm.

1. Disegnare il ciclo nel piano di Clapeyron.
2. Calcolare il calore Q_{AB} scambiato nella trasformazione irreversibile da A a B.
3. Calcolare il rendimento η del ciclo.
4. Calcolare la variazione di entropia ΔS_{AB} nella trasformazione irreversibile da A a B.

Soluzione esercizio 1

1. Poiché sono collegati dalla fune, i due corpi procedono con la stessa accelerazione a. Scegliendo l'asse x orientato verso il basso, le equazioni del moto dei due corpi sono:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g \sin\theta - T \\ m_2 a = m_2 g \sin\theta + T - \mu_d m_2 g \cos\theta \end{cases} \tag{1}$$

   Sommando le due equazioni si ricava:

$$(m_1 + m_2)a = [(m_1 + m_2)\sin\theta - \mu_d m_2 \cos\theta]\, g \tag{2}$$

   e infine

$$a = g\left[\sin\theta - \mu_d \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cos\theta\right] = 4.27 \text{ m/s}^2 \tag{3}$$

2. Poiché si muovono con velocità costante i due corpi hanno accelerazione nulla. Scegliendo l'asse x orientato verso l'alto, le equazioni del moto dei due corpi in questo caso sono:

$$\begin{cases} T' - m_1 g \sin\theta = 0 \\ F - m_2 g \sin\theta - \mu_d m_2 g \cos\theta - T' = 0 \end{cases} \tag{4}$$

   da cui:

$$F = [(m_1 + m_2)\sin\theta + \mu_d m_2 \cos\theta]\, g = 22.17 \text{ N} \tag{5}$$

3. Nel primo caso la tensione T si ricava sostituendo il valore di a, calcolato nel punto 1, nell'equazione del moto (1) per il corpo m_1:

$$T = m_1(g\sin\theta - a) = 1.91 \text{ N} \tag{6}$$

   Nel secondo caso la tensione T' si ricava direttamente dall'equazione del moto (4) per il corpo m_1:

$$T' = m_1 g \sin\theta = 14.72 \text{ N} \tag{7}$$

Soluzione esercizio 2

1. Per determinare la compressione massima della molla possiamo utilizzare il teorema delle forze vive. Consideriamoil tratto discendente, da quando l'anello parte da A con velocità iniziale v_0 fino a quando si ferma con la molla massimamente compressa in E' a distanza $l_0 - \Delta l$ dal punto B.

   Si ha

$$L_{AE'} = -\frac{1}{2}mv_0^2 = 2.5 \text{ J}\,. \tag{8}$$

   D'altra parte, si ha anche

$$\begin{aligned} L_{AE'} &= V(A) - V(E') + \int_A^{E'} \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{r}\,, && (9)\\ &= mgL\sin\theta - mg(l_0 - \Delta l)\sin\theta - \frac{1}{2}k\Delta l^2 - N\mu_d[L - (l_0 - \Delta l)]\,. && (10)\end{aligned}$$

   Uguagliando le due relazioni si ottiene

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = mgL\sin\theta - mg(l_0 - \Delta l)\sin\theta - \frac{1}{2}k\Delta l^2 - N\mu_d[L - (l_0 - \Delta l)]\,, \tag{11}$$

ovvero

$$\Delta l^2 - 2\left(\frac{g}{\omega^2}\sin\theta - \frac{N\mu_d}{k}\right)\Delta l - \frac{v_0^2}{\omega^2} - 2\left(\frac{g}{\omega^2}\sin\theta - \frac{N\mu_d}{k}\right)(L - l_0) = 0\,. \quad (12)$$

Per trovare N si utilizza il secondo principio della dinamica in direzione perpendicolare al piano inclinato, ricavando

$$N = mg\cos\theta = 1.7 \text{ N}\,, \quad (13)$$

che sostituita in (12) dà:

$$\Delta l^2 - \frac{g}{\omega^2}(1 - \sqrt{3}\mu_d)\Delta l - \frac{v_0^2}{\omega^2} - \frac{g}{\omega^2}(1 - \sqrt{3}\mu_d)(L - l_0) = 0\,, \quad (14)$$

dove abbiamo esplicitato il valore di $\sin(\pi/6) = 1/2$ e di $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$.

L'Eq. (14) ha due soluzioni

$$\Delta l = \frac{g}{2\omega^2}(1 - \sqrt{3}\mu_d) \pm \sqrt{\frac{g^2}{4\omega^4}(1 - \sqrt{3}\mu_d)^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} + \frac{g}{\omega^2}(1 - \sqrt{3}\mu_d)(L - l_0)}\,. \quad (15)$$

Prendiamo la soluzione positiva, e quindi

$$\Delta l = \frac{g}{2\omega^2}(1 - \sqrt{3}\mu_d) + \sqrt{\frac{g^2}{4\omega^4}(1 - \sqrt{3}\mu_d)^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} + \frac{g}{\omega^2}(1 - \sqrt{3}\mu_d)(L - l_0)} = 26 \text{ cm}\,. \quad (16)$$

2. La velocità v_1 con cui l'anello torna in A sarà data sempre dal teorema delle forze vive da A in A:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -2N\mu_d[L - (l_0 - \Delta l)]\,, \quad (17)$$

ovvero

$$v_1^2 = v_0^2 - 2\sqrt{3}g\mu_d(L - l_0 + \Delta l)\,, \quad (18)$$

quindi

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\sqrt{3}g\mu_d(L - l_0 + \Delta l)} = 4.7 \text{ m/s}\,. \quad (19)$$

3. Da A a C il problema si riduce ad un problema di balistica. Prendendo come origine degli assi cartesiani il punto O, l'anello parte da $(0, L\sin\theta)$ con velocità iniziale (v_{1x}, v_{1y}) con $v_{1x} = -v_1\cos\theta$ e $v_{1y} = v_1\sin\theta$.

La soluzione generale del moto è

$$\begin{cases} x(t) = v_{1x}t + x(0)\,, \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{1y}t + y(0)\,, \end{cases} \quad (20)$$

e mettendo le condizioni iniziali si trova l'equazione della traiettoria

$$y = -\frac{g}{2v_1^2\cos^2\theta}\,x^2 - \tan\theta\,x + L\sin\theta\,. \quad (21)$$

Imponendo il passaggio da $(-d, 0)$ (con $d > 0$), ed esplicitando i valori trigonometrici, si ottiene:

$$0 = -\frac{2gd^2}{3v_1^2} + \frac{\sqrt{3}}{3}d + \frac{L}{2}\,, \quad (22)$$

cioè l'equazione del secondo ordine

$$d^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v_1^2}{g}\,d - \frac{3}{4}\frac{Lv_1^2}{g} = 0\,. \tag{23}$$

L'Eq. (23) ha due soluzioni delle quali dobbiamo prendere quella positiva:

$$d = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{v_1^2}{g} + \sqrt{\frac{3}{16}\frac{v_1^4}{g^2} + \frac{3}{4}\frac{Lv_1^2}{g}} = 2.6 \text{ m} \tag{24}$$

Soluzione esercizio 3

1. Se BOP è l'angolo α, si avrà $AOP = \pi - \alpha$ e

$$OAP = OPA = \frac{1}{2}(\pi - AOP) = \frac{\alpha}{2}\,. \tag{25}$$

Se $\alpha = \pi/3$, quindi, si ha $OAP = OPA = \pi/6$.

Si può trovare la soluzione al primo quesito utilizzando la seconda cardinale oppure con l'energia.

Seconda Cardinale

Per applicare la seconda cardinale dobbiamo trovare il valore del modulo della forza elastica $\mathbf{F}_e$ applicata in A. La lunghezza $AP = L$ sarà data da

$$L = 2l\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = l\sqrt{3} = 34.6 \text{ cm}\,. \tag{26}$$

Quindi il modulo della forza elastica, applicata in A verso P, è

$$F_e = kL = kl\sqrt{3}\,. \tag{27}$$

Scrivendo la seconda cardinale della statica con centro di riduzione in O, si ha

$$mgl\cos\alpha + lF_e\sin\frac{\alpha}{2} - 2mgl\cos\alpha = 0\,, \tag{28}$$

e sostituendo il valore di F_e, si trova

$$k = \frac{mg}{l\sqrt{3}} = 1.13 \text{ N/m}\,. \tag{29}$$

Energia

Troviamo l'energia potenziale per il sistema. Poniamo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale all'altezza di O. Quindi

$$V(\alpha) = 2mgl\sin\alpha - mgl\sin\alpha + \frac{1}{2}kL^2\,, \tag{30}$$

$$= mgl\sin\alpha + 2l^2k\cos^2\frac{\alpha}{2}\,. \tag{31}$$

Quindi, imponendo

$$\left.\frac{dV}{d\alpha}\right|_{\alpha=\pi/3} = \left.\left(mgl\cos\alpha - 2l^2k\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right|_{\alpha=\pi/3} = 0\,, \tag{32}$$

si ottiene

$$k = \left.\frac{mg}{l}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right|_{\alpha=\pi/3} = \frac{mg}{l\sqrt{3}} = 1.13 \text{ N/m}\,. \tag{33}$$

2. Nell'urto istantaneo la forza elastica non si comporta in maniera impulsiva. Le reazioni vincolari sono concentrate in O. Quindi i momenti angolari rispetto ad O, calcolati subito prima e subito dopo l'urto devono essere uguali. Quindi

$$\begin{aligned} L_{ini} &= m v_0 l \sin\alpha\,, &(34)\\ L_{fin} &= \tilde{I}_0 \omega\,, &(35)\end{aligned}$$

dove

$$\tilde{I}_0 = 4ml^2 + I_0 = 4ml^2 + m\frac{l^2}{3} = \frac{13}{3} ml^2\,. \tag{36}$$

Infine, imponendo $L_{ini} = L_{fin}$ si trova

$$\omega = \frac{3v_0}{13\,l}\sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{26}\frac{v_0}{l} = 10.0\ \mathrm{s}^{-1}\,. \tag{37}$$

Soluzione esercizio 4

2. La temperature degli stati A, B e C si rivacano dall'equazione di stato:

$$\begin{cases} T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = 122\ \mathrm{K} \\ T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = \frac{2P_A \frac{1}{2} V_A}{nR} = \frac{P_A V_A}{nR} = T_A \\ T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = \frac{P_B V_A}{nR} = 2\frac{P_A V_A}{nR} = 2T_A = 244\ \mathrm{K} \end{cases} \tag{38}$$

Il calore scambiato nella trasformazione AB si ricava per differenza tra il calore totale scambiato durante il ciclo e quelli scambiati nelle trasformazioni reversibili:

$$Q_{AB} = Q_{TOT} - Q_{BC} - Q_{CA} \tag{39}$$

dove $Q_{TOT} = L_{TOT} = 15\ \mathrm{l} \cdot \mathrm{atm} = 1520\ \mathrm{J}$, perché nel ciclo $\Delta U_{TOT} = 0$, ed i calori nelle trasformazioni reversibili sono dati da:

$$\begin{cases} Q_{BC} = nc_p(T_C - T_B) = 70\ \mathrm{l}\cdot\mathrm{atm} = 7093\ \mathrm{J} \\ Q_{CA} = nc_V(T_A - T_C) = -50\ \mathrm{l}\cdot\mathrm{atm} = -5066\ \mathrm{J} \end{cases} \tag{40}$$

Quindi $Q_{AB} = -5\ \mathrm{l} \cdot \mathrm{atm} = -507\ \mathrm{J}$.

3. Nel ciclo il calore viene assorbito solo durante la trasformazione BC, quindi $Q_{ASS} = Q_{BC} = 70\ \mathrm{l} \cdot \mathrm{atm}$ ed il rendimento è:

$$\eta = \frac{L_{TOT}}{Q_{ASS}} = 21\% \tag{41}$$

4. Poiché $T_A = T_B$ posso calcolare ΔS_{AB} lungo la corrispondente isoterma reversibile ($dU = 0$) che collega i due stati:

$$\begin{aligned} \Delta S_{AB} &= \int_A^B \frac{\delta Q}{T_A} = \frac{1}{T_A}\int_{V_A}^{V_B} p dV = nR\int_{V_A}^{V_B}\frac{dV}{V} &(42)\\ &= nR\ln\frac{V_B}{V_A} = -0.114\ \mathrm{l}\cdot\mathrm{atm}\cdot\mathrm{K}^{-1} = -11.55\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1} &(43)\end{aligned}$$

Esame 24 Febbraio 2017

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

Dipartimento di Matematica

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Anno Accademico 2016-2017

Esame - Fisica Generale I
24 Febbraio 2017

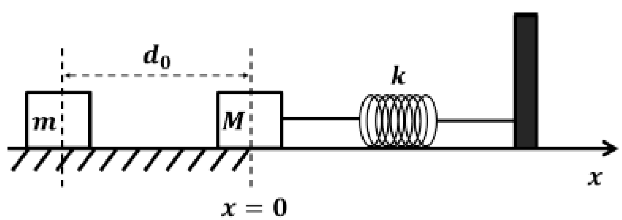
R. Bonciani, P. Dore

Regole per lo scritto

- RECUPERO 1° ESONERO: risolvere gli esercizi 1 e 2 in 2h.
- RECUPERO 2° ESONERO: risolvere gli esercizi 3 e 4 in 2h.
- COMPITO: risolvere gli esercizi 2, 3 e 4 (contrassegnati con $*$) in 3h.

Esercizio 1

Un corpo di massa M è poggiato su una guida orizzontale coincidente con l'asse x. Il corpo è inizialmente fermo nella posizione $x = 0$ ed è collegato, tramite una molla ideale di costante elastica k, ad una parete che si trova nel tratto $(0, +\infty)$ della guida, come in figura. Nel tratto $(-\infty, 0)$ della guida agisce una forza di attrito dinamico di coefficiente μ_d; il tratto $(0, +\infty)$ invece è liscio. Una seconda massa m, partendo dalla posizione $x = -d_0$ con velocità v_0, va ad urtare la massa M. Dopo l'urto la massa M inizia ad oscillare.

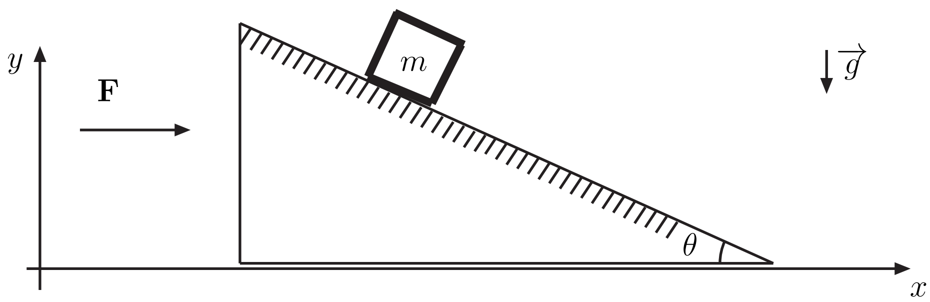


1. Nel caso in cui l'urto tra i due corpi sia perfettamente elastico, calcolare il tempo t_1 necessario affinché m passi nuovamente per la posizione iniziale $x = -d_0$, la posizione in cui si ferma, lo spostamento massimo di M rispetto alla posizione iniziale durante l'oscillazione nel tratto $(0, +\infty)$ e il tempo t_2 necessario perché M ripassi la prima volta per la posizione iniziale $x = 0$;
2. Nel caso in cui l'urto tra i due corpi sia perfettamente anelastico, calcolare lo spostamento massimo del sistema $M+m$ rispetto alla posizione iniziale durante l'oscillazione nel tratto $(0, +\infty)$ e il tempo t_2' necessario perché $M + m$ ripassi la prima volta per la posizione iniziale $x = 0$.
3. BONUS - In entrambi i casi precedenti dopo essere passato per la posizione iniziale il corpo (M se l'urto è elastico, $M + m$ se è anelastico) continua ad oscillare nel tratto $(-\infty, 0)$ della guida. Calcolare l'ampiezza massima della prima oscillazione nel tratto con attrito nei due casi.

Valori numerici: $m = 200$ g; $M = 1$ kg; $k = 2$ N/m; $d_0 = 0.5$ m; $v_0 = 3$ m/s; $\mu_d = 0.2$.

Esercizio 2 *

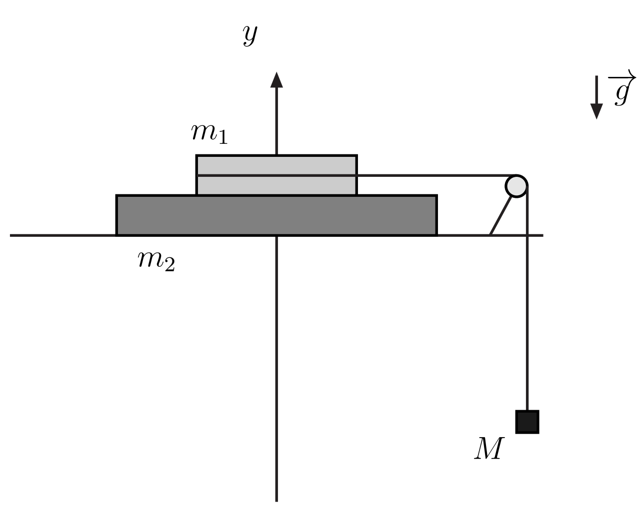
Un blocco di massa $M = 5$ kg è vincolato a scorrere su una guida orizzontale priva di attrito. Un punto materiale di massa $m = 300$ g è posto sulla faccia del blocco inclinata di un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Fra punto materiale e blocco c'è attrito con coefficiente di attrito statico $\mu_S = 0.2$. Sul blocco agisce una forza $\mathbf{F}$ costante diretta orizzontalmente (come in figura).



1. Calcolare i valori minimo e massimo di F affinché il punto rimanga in quiete rispetto al blocco.
2. Calcolare i corrispondenti valori dell'accelerazione del blocco.
3. Calcolare le reazioni esercitate sul blocco.

Esercizio 3 *

Un sistema è composto da due dischi metallici, omogenei, coassiali e fissati fra loro, rispettivamente di masse $m_1 = 2$ kg e $m_2 = 3$ kg e raggi $R_1 = 0.1$ m e $R_2 = 0.2$ m. Il sistema può ruotare senza attrito attorno all'asse y perpendicolare ai due dischi e passante per il loro centro di massa. Sul disco di massa m_1 è avvolto un filo ideale che, tramite una carrucola ideale (di massa nulla) è collegato alla massa $M = 1$ kg (vedi figura). Il sistema è soggetto alla forza di gravità.



1. A $t = 0$ la massa M, inizialmente ferma, viene lasciata libera. Calcolare il tempo t_0 che impiega M a scendere di 10 m.

2. Sul bordo di m_2 è fissato un piccolo magnete, di massa $m = 10$ g e dimensioni trascurabili, in maniera tale da non poter scivolare sul bordo. Il magnete è tenuto attaccato al disco da una forza magnetica radiale costante pari a 1.5 N. Al tempo t_0 il magnete sarà ancora attaccato al disco?

Esercizio 4 $*$

Una mole di gas perfetto monatomico, inizialmente nello stato A con $T_A = 500$ °K e volume V_A, compie una trasformazione ciclica reversibile composta da: una adiabatica AB che termina a $T_B = T_A/2$, una trasformazione reversibile BC di equazione $pV^2 = cost$, che porta il gas alla Temperatura $T_C = T_A$ ed un volume $V_C = \sqrt{2}V_A$ e infine da una isoterma reversibile che riporta Il sistema nello stato iniziale A.

1. Si disegni il ciclo sul piano di Clapeyron.

2. Si calcoli il lavoro compiuto dal gas in tutto il ciclo.

3. Si calcoli il suo incremento di entropia nella trasformazione BC.

Soluzione esercizio 1

Si trova la velocità v_1 con cui la massa m impatta su M con il teorema delle forze vive:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu_d mgd_0 \ \rightarrow\ v_1 = \sqrt{v_0^2 - \mu_d g d_0} = 2.83 \text{ m/s} \tag{1}$$

Il tempo t_A impiegato per raggiungere la massa M si trova considerando un moto uniformemente accelerato con accelerazione $a_1 = -\mu_d g = 1.96$ m/s^2:

$$0 = -d_0 + v_0 t_A - \frac{1}{2}\mu_d g t_A^2 \ \rightarrow\ t_A = \frac{v_0}{\mu_d g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{\mu_d g}\right)^2 - \frac{2d_0}{\mu_d g}} \tag{2}$$

scegliendo la minore delle due soluzioni si ricava $t_A = 0.18$ s.
Caso 1: urto elastico - applichiamo la conservazione della quantità di moto e dell'energia:

$$\begin{cases} mv_1 = MV_0 - mv_2 \\ \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}MV_0^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_2 = \frac{M-m}{M+m}v_1 = \frac{2}{3}v_1 = 1.89 \text{ m/s} \\ V_0 = \frac{2m}{M+m}v_1 = \frac{1}{3}v_1 = 0.94 \text{ m/s} \end{cases} \tag{3}$$

Dopo l'urto il corpo m compie un moto uniformemente accelerato con accelerazione $\mu_d g$, imponiamo il passaggio per $x = -d_0$ e troviamo il tempo del ritorno t_R:

$$-d_0 = -v_2 t_R + \frac{1}{2}\mu_d g t_R^2 \ \rightarrow\ t_R = \frac{v_2}{\mu_d g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_2}{\mu_d g}\right)^2 - \frac{2d_0}{\mu_d g}} \tag{4}$$

scegliendo la minore delle due soluzioni si ricava $t_R = 0.32$ s.
Il tempo necessario per tornare nella posizione iniziale è quindi $t_1 = t_A + t_R = 0.50$ s.
La distanza massima dalla posizione iniziale è l'ampiezza delle oscillazioni A_1 e il tempo per tornare in $x = 0$ è la metà del periodo T in assenza di attrito. Per calcolare periodo e ampiezza delle oscillazioni di M dopo l'urto:

$$\begin{cases} \omega = 2\pi\sqrt{\frac{k}{M}} \\ \frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}MV_0^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{k}} = 0.35 \text{ s} \\ A_1 = \sqrt{\frac{MV_0^2}{k}} = TV_0 = 0.66 \text{ m} \end{cases} \tag{5}$$

Caso 2: urto completamente anelastico - applichiamo la conservazione della quantità di moto:

$$mv_1 = (M+m)V_0' - mv_2' \ \rightarrow\ V_0' = \frac{m}{M+m}v_1 = \frac{1}{6}v_1 = 0.47 \text{ m/s} \tag{6}$$

Anche in questo caso è necessario calcolare l'ampiezza delle oscillazioni A_1' e la metà del periodo T' in assenza di attrito:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}T' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M+m}{k}} = 0.39 \text{ s} \\ A_1' = T'V_0' = 0.36 \text{ m} \end{cases} \tag{7}$$

BONUS: Quando il corpo ripassa per la posizione iniziale la prima volta la sua velocità è in modulo uguale a quella che aveva subito dopo l'urto. Quando invece raggiunge la massima

distanza dalla posizione iniziale la sua velocità è nulla.
Applicando il teorema delle forze vive nel caso dell'urto elastico si ricava quindi:

$$-\frac{1}{2}MV_0^2 = -\mu_d M g A_2 - \frac{1}{2}kA_2^2 \tag{8}$$

da cui:

$$A_2^2 + 2\mu_d g\frac{M}{k}A_2 - \frac{M}{k}V_0^2 = 0 \tag{9}$$

e quindi:

$$A_2 = -\mu_d g\frac{M}{k} \pm \sqrt{\mu_d^2 g^2\frac{M^2}{k^2} + V_0^2\frac{M}{k}} \tag{10}$$

Scegliendo la soluzione positiva si ottiene $A_2 = 0.20$ m.
Analogamente nel caso dell'urto anelastico:

$$A_2' = -\mu_d g\frac{M+m}{k} \pm \sqrt{\mu_d^2 g^2\frac{(M+m)^2}{k^2} + (V_0')^2\frac{(M+m)}{k}} = 0.055 \text{ m} \tag{11}$$

Soluzione esercizio 2

Dobbiamo considerare due casi:

1. La forza F è minima. In questo caso il punto materiale tenderebbe a scendere lungo il piano inclinato, se non fosse per la forza d'attrito che lo mantiene su. Il modulo di tale componente è massimo e pari al prodotto del coefficiente d'attrito per la reazione normale agente sul punto.

2. La forza F è massima. In questo caso il punto materiale tenderebbe a risalire lungo il piano inclinato, se non fosse per la forza d'attrito che lo mantiene su. Anche in questo caso Il modulo della componente tangenziale della reazione vincolare è massimo e pari al prodotto del coefficiente d'attrito per la reazione normale agente sul punto.

Siccome il punto deve essere in quiete rispetto al blocco, entrambi hanno la stessa accelerazione.

Dividiamo il sistema in due: blocco e punto materiale.

Primo caso
Le forze agenti sul blocco possono essere scomposte lungo le due direzioni x e y:

$$\begin{cases} M\ddot{x} = F - N\sin\theta + F_t\cos\theta\,, \\ 0 = -F_t\sin\theta + R_N - N\cos\theta - Mg \end{cases} \tag{12}$$

dove R_N è la reazione normale del suolo sul blocco e N e F_t sono rispettivamente la reazione normale e tangenziale agenti dal punto sul blocco.

Le forze agenti sul punto danno:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = N\sin\theta - F_t\cos\theta\,, \\ 0 = F_t\sin\theta + N\cos\theta - mg\,. \end{cases} \tag{13}$$

Inoltre

$$F_t = \mu_S N\,. \tag{14}$$

Dalla seconda di (13) si ottiene

$$N = \frac{mg}{\mu_S \sin\theta + \cos\theta} = \frac{2mg}{\mu_S + \sqrt{3}} = 3.05 \text{ N}\,, \tag{15}$$

che sostituita nella prima dà

$$\ddot{x}_{min} = g\frac{\sin\theta - \mu_S\cos\theta}{\mu_S \sin\theta + \cos\theta} = g\frac{1-\sqrt{3}\mu_S}{\mu_S + \sqrt{3}} = 3.32 \text{ m/s}^2\,. \tag{16}$$

Dalle prime equazioni di (12) e (13), poi, si trova

$$F_{min} = (m+M)\ddot{x}_{min} = 17.59 \text{ N}\,. \tag{17}$$

La seconda di (12) insieme alla seconda di (13) infine danno

$$R_N = (m+M)g = 60.0 \text{ N}\,. \tag{18}$$

Secondo caso
la reazione tangenziale cambia di verso ma rimane dello stesso modulo. Allora si ha

$$\ddot{x}_{max} = g\frac{\sin\theta + \mu_S\cos\theta}{-\mu_S \sin\theta + \cos\theta} = g\frac{1+\sqrt{3}\mu_S}{\sqrt{3} - \mu_S} = 8.62 \text{ m/s}^2\,. \tag{19}$$

Dalle prime equazioni di (12) e (13), poi, si trova

$$F_{max} = (m+M)\ddot{x}_{min} = 45.69 \text{ N}\,. \tag{20}$$

Con questi dati è possibile rispondere a tutte le domande dell'esercizio.

Si può anche ragionare considerando il punto materiale in un sistema di riferimento che accelera rispetto a quello fisso con allerelazione $\ddot{x}$. Siccome imponiamo che il punto sia fermo rispetto al blocco, possiamo immediatamente trovare l'accelerazione dei due usando il secondo principio

$$F = (m+M)\ddot{x}\,, \tag{21}$$

da cui

$$\ddot{x} = \frac{F}{(m+M)}\,. \tag{22}$$

Sel sistema di riferimento accelerato, il punto materiale è in equilibrio, soggetto alla forza peso, alla forza d'attrito e alla forza di trascinamento

$$F_{tr} = -m\ddot{x} = -\frac{m}{(m+M)}F\,. \tag{23}$$

Di conseguenza si puo' pensare ad un problema di statica in questo sistema di riferimento, trovando i due valori di F_{tr} e quindi di F, tramite le (23), e poi risalendo all'accelerazione dalla (22).

Soluzione esercizio 3

Il problema si può affrontare con le cardinali.

Dividiamo il sistema in due: blocchetto di massa M e volano. Orientiamo l'asse verticale verso il basso. Per il blocchetto possiamo scrivere lungo le y (direzione verticale)

$$M\ddot{y} = -T + Mg\,. \tag{24}$$

Al sistema dei due cilindri sarà applicata dunque la tensione T dalla corda. Questa sarà sempre perpendicolare al raggio R_1. Il sistema si comporta come fosse bidimensionale nel piano perpendicolare Scrivendo la componente y della seconda cardinale rispetto ad un punto sull'asse y si ottiene

$$R_1 T = I_{cm}\ddot{\theta}\,, \tag{25}$$

dove θ è l'angolo di rotazione del sistema intorno all'asse y preso positivo nel senso di svolgimento della corda.

L'accelerazione lineare $\ddot{y}$ e quella angolare sono legate dalla

$$R_1\ddot{\theta} = \ddot{y}\,, \tag{26}$$

che dice che $\ddot{y}$ è proprio l'accelerazione tangenziale del punto sul bordo del cilindro piccolo.

Il momento d'inerzia del sistema, I_{cm}, è dato da

$$I_{cm} = \frac{1}{2}(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) = 0.07\ \text{kg} \quad \text{m}^2\,. \tag{27}$$

Quindi l'accelerazione $\ddot{y}$ si trova sostituendo la tensione fra le (24,25) e utilizzando la (26):

$$\left(M + \frac{I_{cm}}{R_1^2}\right)\ddot{y} = Mg \tag{28}$$

ovvero

$$\ddot{y} = \frac{Mg}{\left(M + \frac{I_{cm}}{R_1^2}\right)} = 1.23\ \text{m/s}^2\,. \tag{29}$$

Il moto di M è uniformemente accelerato con accelerazione $\ddot{y}$, quindi per percorrere $\Delta y = 10$ m impiegherà

$$t_0 = \sqrt{\frac{2\Delta y}{\ddot{y}}} = 4.04\ \text{s}\,. \tag{30}$$

Per sapere se il piccolo magnete a $t = t_0$ è ancora attaccato al disco, dobbiamo sapere il valore della velocità angolare del sistema a $t = t_0$. Avremo

$$\dot{\theta}(t_0) = \int_0^{t_0}\ddot{\theta}dt = \frac{\ddot{y}}{R_1}t_0 = \frac{\sqrt{2\Delta y\,\ddot{y}}}{R_1} = 49.52\ \text{s}^{-1}\,. \tag{31}$$

Se ci mettiamo nel sistema di riferimento rotante con il cilindro (la giostra), il magnetino sarà soggetto a varie forze. Concentriamoci sulla componente radiale. La forza di attrazione magnetica sarà diretta verso il centro, in modulo costante N:

$$\mathbf{N} = -N\hat{\mathbf{u}}_r\,, \tag{32}$$

mentre l'altra forza che agisce sul magnete, la forza centripeta, sarà diretta sempre radialmente, ma lungo $\hat{\mathbf{u}}_r$:

$$\mathbf{F}_c = -m\omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{R}_2) = m\omega^2 R_2 \hat{\mathbf{u}}_r \,. \tag{33}$$

Il magnete rimarrà attaccato ad m_2 fintanto che F_c non superi in modulo N, ovvero

$$\omega \leq \sqrt{\frac{N}{mR_2}} = 27.39 \text{ s}^{-1} \,. \tag{34}$$

Quindi il magnete a $t = t_0$ non è più attaccato al cilindro.

Soluzione esercizio 4

1. Per disegnare la trasformazione nel piano di Clapeyron, consideriamo che per un gas perfetto monoatomico
$$\gamma = \frac{5}{3} < 2 \,. \tag{35}$$
Quindi la trasformazione BC è più pendente di AB.

2. Nella trasformazione AB, adiabatica, si ha
$$đQ = 0 = dU + đL = \tilde{c}_V dT + đL \,, \tag{36}$$
dove $\tilde{c}_V$ è il calore specifico molare del gas. Allora, si può calcolare il lavoro come
$$L_{AB} = -\int_A^B dU = -\tilde{c}_V (T_B - T_A) = \tilde{c}_V \frac{T_A}{2} = \frac{3}{4} R T_A = 3116 \text{ J} \,. \tag{37}$$
Lungo la trasformazione BC si ha $pV^2 = cost$, quindi anche $pV^2 = P_B V_B^2$. Il lavoro sarà dato da
$$L_{BC} = \int_{V_B}^{V_C} p\,dV = \int_{V_B}^{V_C} p_B V_B^2 \frac{dV}{V^2} = p_B V_B^2 \left(\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_C} \right) = p_B V_B \left(1 - \frac{V_B}{V_C} \right) \tag{38}$$
$$= R T_B \left(1 - \frac{V_B}{V_C} \right) \,. \tag{39}$$
Si ha anche che
$$1 = \frac{p_B V_B^2}{p_C V_C^2} = \frac{R T_B V_B}{R T_C V_C} = \frac{T_B V_B}{T_C V_C} \,, \tag{40}$$
ovvero
$$\frac{V_B}{V_C} = \frac{T_C}{T_B} \,, \tag{41}$$
da cui infine
$$L_{BC} = R T_B \left(1 - \frac{V_B}{V_C} \right) = R(T_B - T_C) = -2077 \text{ J} \,. \tag{42}$$
La trasformazione CA è isoterma, per cui
$$L_{CA} = R T_A \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right) = -\frac{1}{2} R T_A \ln 2 = -1440 \text{ J} \,. \tag{43}$$

Il lavoro totale è allora:

$$L_{tot} = -401 \text{ J}\,. \tag{44}$$

3. La trasformazione BC è reversibile, quindi ci possiamo calcolare la variazione di entropia direttamente:

$$dS = \frac{đQ}{T} = \tilde{c}_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T}\, dV = \tilde{c}_V \frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V}\,, \tag{45}$$

dove abbiamo usato l'equazione di stato dei gas perfetti. Integrando da B a C si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta S_{BC} &= S(C) - S(B) = \tilde{c}_V \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) + R\ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = \frac{3}{2}R\ln 2 - R\ln 2\,, \\ &= \frac{1}{2}R\ln 2 = 2.88 \text{ J/K}\,. \end{aligned} \tag{46}$$

Un altro modo di procedere è considerare il fatto che per il ciclo la variazione di entropia è nulla:

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = 0\,. \tag{47}$$

Inoltre, anche lungo la trasformazione adiabatica ($đQ = 0$) reversibile abbiamo

$$\Delta S_{AB} = 0\,, \tag{48}$$

quindi

$$\Delta S_{BC} = -\Delta S_{CA} = -R\int_C^A \frac{dV}{V} = -R\ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) = \frac{1}{2}R\ln 2 = 2.88 \text{ J/K}\,. \tag{49}$$

Esame 28 Giugno 2017

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

Dipartimento di Matematica

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

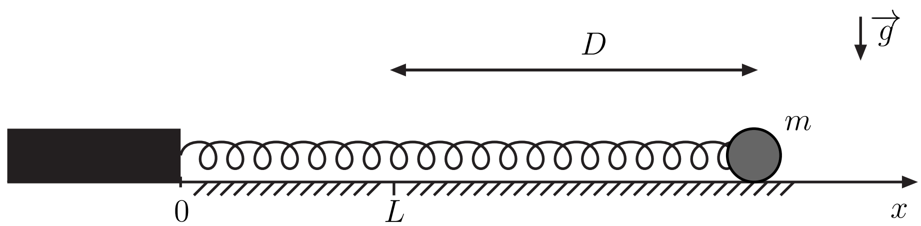
Anno Accademico 2016-2017

Esame - Fisica Generale I
28 Giugno 2017

R. Bonciani, P. Dore

Esercizio 1

Una molla ideale (massa nulla, costante elastica $k = 19.6$ N/m e lunghezza a riposo $L = 40$ cm) è poggiata su una guida orizzontale. Un estremo è fissato nel punto O, mentre all'altro estremo è agganciato un punto materiale di massa $m = 100$ g. La guida è scabra e il coeffiente d'attrito dinamico fra m e guida è $\mu_d = 0.5$. Inizialmente la molla è allungata di un tratto $D = 30$ cm. Quando viene lasciata libera, la massa m inizia ad oscillare.

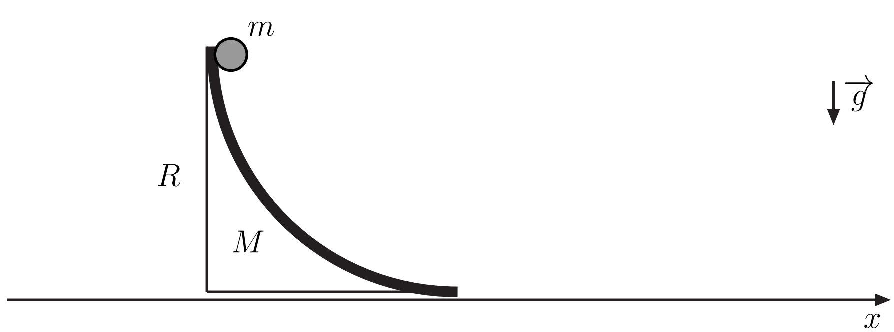


Determinare

1. La distanza minima da O raggiunta da m.
2. La velocità con cui m passa la seconda volta per L (considerare che l'attrito statico è tale che m, fermatosi nel punto di minima distanza da O, possa ripartire sotto l'azione della molla).

Esercizio 2

Una massa puntiforme $m = 200$ g parte da ferma dall'altezza $R = 50$ cm e si muove lungo un blocco di massa $M = 1$ kg con profilo a forma di quarto di circonferenza di raggio R. Il blocco è disposto in un piano verticale ed è libero di muoversi senza attrito su di un piano orizzontale (asse delle x). La superficie di contatto fra blocco e punto materiale è scabra.

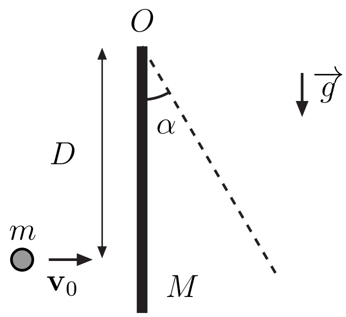


Sapendo che m arriva alla base del blocco con velocità pari a $v_0 = 0.5$ m/s in modulo, calcolare:

1. La velocità finale del blocco di massa M.
2. Il lavoro fatto dalla forza d'attrito.

Esercizio 3

Un'asta di lunghezza $L = 50$ cm e massa $M = 0.5$ kg è libera di ruotare attorno al suo estremo O in un piano verticale (in presenza di gravità). Un proiettile di massa $m = 0.2$ kg e velocità iniziale $v_0 = 5$ m/s orizzontale, si conficca nell'asta a distanza $D = 30$ cm da O (urto perfettamente anelastico).



Determinare l'angolo massimo α di oscillazione del sistema dopo l'urto.

Esercizio 4

Un blocco di rame di massa $m_R = 300$ g e temperatura $T_R = 97$ °C (con calore specifico $c_R = 385$ J/kg K) viene posto in un calorimetro ideale riempito con una massa $m_A = 100$ g di acqua alla temperatura $T_A = 7$ °C (calore specifico $c_A = 4186$ J/kg K). Determinare la variazione di entropia del sistema al raggiungimento dell'equilibrio termico.

Esercizio 5

Un gas perfetto monoatomico, in equilibrio nello stato A (a p_A, V_A e T_A), viene riscaldato in maniera irreversibile mantenendo il suo volume costante fino a raggiungere lo stato di equilibrio B, a pressione p_B e temperatura $T_B = 300$ K. In conseguenza di questo riscaldamento, il gas subisce una variazione di entropia di $\Delta S = 4$ J/K. Successivamente, il gas torna alla pressione iniziale, p_A, tramite una trasformazione isoterma reversibile, che lo porta allo stato di equilibrio C con $p_C = p_A$ e volume V_C. Calcolare il lavoro compiuto dal gas nella trasformazione dallo stato A allo stato C.

Soluzione esercizio 1

1. La distanza minima da O (indichiamola con x_1) viene raggiunta dopo il primo semi periodo. Utilizziamo il teorema delle forze vive.

   L'energia iniziale è tutta potenziale e vale

$$E_{in} = \frac{1}{2}kD^2 \,. \tag{1}$$

   Dopo il primo semi periodo il punto si ferma e di nuovo l'energia finale è tutta potenziale

$$E_{fin} = \frac{1}{2}k(L - x_1)^2 \,. \tag{2}$$

   Il teorema delle forze vive dice che

$$L_{Dx_1} = T_{x_1} - T_D = 0 \,, \tag{3}$$

   poiché l'energia cinetica iniziale e quella finale sono nulle. D'altra parte

$$L_{Dx_1} = \frac{1}{2}kD^2 - \frac{1}{2}k(L - x_1)^2 + \int_{L+D}^{x_1} \mathbf{F}_{attr} \cdot d\mathbf{x} \,. \tag{4}$$

   La forza d'attrito è costante e ha come modulo

$$F_{attr} = mg\mu_d \tag{5}$$

   e si oppone al moto del punto. Quindi, alla fine si ottiene la seguente equazione

$$\frac{1}{2}kD^2 - \frac{1}{2}k(L - x_1)^2 - \mu_d mg(L + D - x_1) = 0 \,. \tag{6}$$

   Per trovare x_1 dobbiamo quindi risolvere l'equazione di secondo grado

$$x_1^2 - 2\left[\frac{\mu_d mg}{k} + L\right] x_1 - D^2 + L^2 + 2\frac{\mu_d mg}{k}(L + D) = 0 \,. \tag{7}$$

   Le due soluzioni sono

$$x_1 = \frac{\mu_d mg}{k} + L \pm \sqrt{\left[\frac{\mu_d mg}{k} + L\right]^2 + D^2 - L^2 - 2\frac{\mu_d mg}{k}(L + D)} \,. \tag{8}$$

   Quindi, abbiamo le due soluzioni

$$x_1^+ = 0.7 \text{ m} \,, \tag{9}$$
$$x_1^- = 0.15 \text{ m} \,. \tag{10}$$

   La soluzione x_1^+ non è accettabile e si prende

$$x_1 = x_1^- = 15 \text{ cm} \,. \tag{11}$$

2. Per trovare la velocità in L si utilizza di nuovo il teorema delle forze vive. Il punto riparte da fermo in x_1 soggetto alla forza elastica e alla forza d'attrito. Si ha

$$L_{x_1 L} = \frac{1}{2} m v^2 \tag{12}$$

e

$$L_{x_1 L} = \frac{1}{2} k (L - x_1)^2 + \int_{x_1}^{L} \mathbf{F}_{attr} \cdot d\mathbf{x} = \frac{1}{2} k (L - x_1)^2 - mg\mu_d (L - x_1)\,. \tag{13}$$

Quindi, prendendo il valore positivo della velocità:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(L - x_1)^2 - 2\mu_d g (L - x_1)} = 3.13 \text{ m/s}\,. \tag{14}$$

Soluzione esercizio 2

1. L'unica forza esterna che agisce sul sistema è la forza di gravità, che è diretta lungo l'asse delle y. Quindi durante il moto si conserva la componente x della quantità di moto del sistema. Se V_x è la velocità finale del blocco, visto che v_0, velocità finale del punto materiale, è diretta lungo l'asse delle x, si ha

$$M V_x + m v_0 = 0\,, \tag{15}$$

da cui

$$V_x = -\frac{m}{M} v_0 = -0.1 \text{ m/s}\,. \tag{16}$$

2. Per trovale il lavoro della forza d'attrito, L_{attr}, utilizziamo il teorema delle forze vive. Si ha

$$L = T_{fin} - T_{in}\,. \tag{17}$$

L'energia cinetica finale del sistema è data dalla somma delle energie cinetiche delle due parti:

$$T_{fin} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} M V_x^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right)\,, \tag{18}$$

mentre $T_{in} = 0$. D'altra parte, il lavoro totale L è dato dal lavoro compiuto dalla forza d'attrito e dal lavoro della forza peso

$$L = mgR + L_{attr}\,. \tag{19}$$

Quindi, in totale si ha

$$L_{attr} = T_{fin} - mgR = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right) - mgR = -0.95 \text{ J}\,. \tag{20}$$

Soluzione esercizio 3

Siccome le reazioni vincolari sono concentrate in O, utilizzando la seconda cardinale impulsiva centrata in O abbiamo che il momento della quantità di moto subito dopo l'urto è uguale al momento della quantità di moto subito prima dell'urto (poiché il momento delle forze impulsive rispetto ad O si annulla):

$$L_O^{in} = L_O^{fin}\,, \tag{21}$$

dove

$$L_O^{in} = m v_0 D \tag{22}$$

e

$$L_O^{fin} = I_{tot}\omega_0\,, \tag{23}$$

dove

$$I_{tot} = \frac{1}{3}ML^2 + mD^2 = 0.06 \text{ kg m}^2\,. \tag{24}$$

Si ricava quindi la velocità angolare iniziale

$$\omega_0 = \frac{m v_0 D}{I_{tot}} = 5.03 \text{ s}^{-1}\,. \tag{25}$$

Subito dopo l'urto anelastico l'energia si conserva e quindi possiamo ricavare l'angolo massimo α dalla conservazione dell'energia, ammettendo che in α il sistema sia fermo (solo energia potenziale):

$$\frac{1}{2}I_{tot}\omega_0^2 = g\left(M\frac{L}{2} + mD\right)(1-\cos\alpha)\,. \tag{26}$$

Si ottiene

$$\alpha = \arccos\left(1 - \frac{I_{tot}\omega_0^2}{g(LM+2mD)}\right) = 0.95 \text{ rad}\,. \tag{27}$$

Soluzione esercizio 4

Troviamo la temperatura di equilibrio T_{eq}. Si ha

$$m_R c_R (T_R - T_{eq}) = m_A c_A (T_{eq} - T_A)\,, \tag{28}$$

da cui

$$T_{eq} = \frac{m_R c_R T_R + m_A c_A T_A}{m_R c_R + m_A c_A} = 299.6 \text{ K}\,. \tag{29}$$

La variazione di entropia sarà data dalla somma delle variazioni dei due materiali.

$$\Delta S_R = \int_{T_R}^{T_{eq}} \frac{dQ}{T} = m_R c_R \int_{T_R}^{T_{eq}} \frac{dT}{T} = m_R c_R \ln\left(\frac{T_{eq}}{T_R}\right) = -24.42 \text{ J/K}\,, \tag{30}$$

$$\Delta S_A = \int_{T_A}^{T_{eq}} \frac{dQ}{T} = m_A c_A \int_{T_A}^{T_{eq}} \frac{dT}{T} = m_A c_A \ln\left(\frac{T_{eq}}{T_A}\right) = 28.12 \text{ J/K}\,, \tag{31}$$

con

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_R + \Delta S_A = 3.7 \text{ J/K}\,. \tag{32}$$

Soluzione esercizio 5

Lungo la trasformazione irreversibile non è possibile calcolare la differenza di entropia, ma possiamo considerare una trasformazione analoga, isocora reversibile, e trovare che

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T} = nc_V \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = nc_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) . \tag{33}$$

Nella trasformazione $A \to B$ il lavoro è nullo (isocora). Quindi dobbiamo considerare il lavoro fatto nella trasformazione $B \to C$. Trattandosi di una isoterma reversibile si ha

$$L_{BC} = nRT_B \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) . \tag{34}$$

Considerando che $V_B = V_A$ e $P_A = p_C$ e che $p_A V_B = nRT_A$ e $p_A V_C = nRT_B$, si ha

$$L_{BC} = nRT_B \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = nRT_B \frac{\Delta S}{nc_V} = \frac{2T_B \Delta S}{3} = 800 \text{ J} . \tag{35}$$

Esame 20 Luglio 2017

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

Dipartimento di Matematica

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

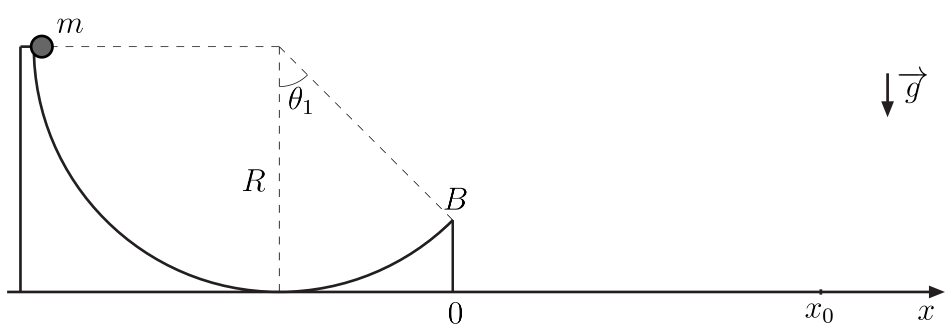
Anno Accademico 2016-2017

Esame - Fisica Generale I
20 Luglio 2017

R. Bonciani, P. Dore

Esercizio 1

Un punto materiale di massa m scorre sulla guida semicircolare liscia descritta in figura ($\theta_1 = \pi/4$). Al tempo $t = t_0$, il punto viene lasciato da fermo nel punto ad altezza R dal suolo (dove R è il raggio della guida), come in figura. In seguito all'azione della forza di gravità, il punto si mette in moto, percorre la guida e se ne distacca in B. Da B in poi il punto cade a terra rimbalzando sul suolo (asse delle x) con urti successivi perfettamente elastici.



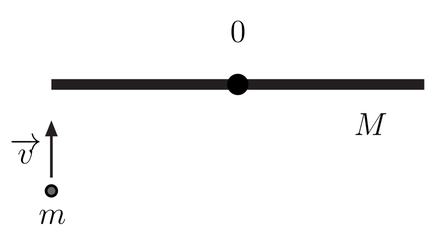
Calcolare:

a) la velocità (in modulo, direzione e verso) con cui il punto materiale si distacca dalla guida nel punto B, nel caso in cui $R = 1$ m;

b) il valore di R affinché il secondo rimbalzo al suolo avvenga nel punto $x_0 = 2.5$ m.

Esercizio 2

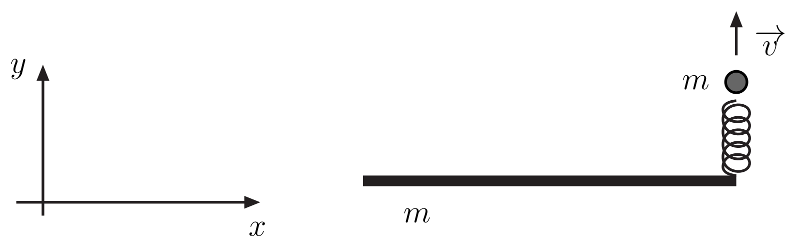
Un'asta omogenea di massa $M = 1$ kg e lunghezza l, appoggiata su un piano orizzontale privo di attrito, è incernierata al piano nel suo punto centrale O. Un proiettile di massa $m = 0.1$ kg e velocità di modulo $v = 10$ m/s, diretta perpendicolarmente all'asta (vedi figura) la colpisce ad un estremo, restandovi conficcato.



Subito dopo l'urto, il sistema si mette in rotazione, ma tende a rallentare a causa di un attrito fra cerniera e sbarra, che esercita un momento frenante costante, di modulo τ. Tutto il processo avviene nel piano orizzontale. Determinare il valore di τ sapendo che il sistema si ferma dopo aver compiuto 2 giri.

Esercizio 3

Un'asta omogenea di massa $M = 1$ kg e lunghezza l è appoggiata su un piano orizzontale (x, y) privo di attrito. Un punto materiale di massa m è poggiato all'estremità di una molla ideale di costante elastica $k = 5 \cdot 10^4$ N/m, compressa di un tratto $A = 7$ cm. L'altra estremità della molla è collegata ad una estremità dell'asta come mostrato in figura. Il sistema è tenuto fermo in questa configurazione da un blocco.



All'istante $t = 0$ il blocco viene rimosso. Determinare l'espressione del modulo della velocità v con cui il punto materiale si stacca dalla molla, assumendo che sia diretta lungo l'asse y e che tutto il processo avvenga nel piano orizzontale, come mostrato in figura. Per i calcoli utilizzare $m = \frac{1}{3}M$.

Esercizio 4

Un gas perfetto compie un ciclo di Carnot reversibile fra due sorgenti con $\Delta T = T_1 - T_2 = 50$ K. Sapendo che la variazione di entropia del gas lungo l'isoterma a temperatura inferiore, T_2, è $\Delta S_2 = -20$ J/K, calcolare il lavoro compiuto dal gas in un ciclo.

Esercizio 5

10 moli di gas perfetto vengono compresse reversibilmente con una trasformazione isoterma, da un volume iniziale $V_1 = 1$ m^3 ad un volume finale V_2. Il gas è contenuto in un recipiente a pareti isolanti e può scambiare calore solo con una sorgente che è costituita da una massa di ghiaccio $m = 0.1$ kg alla temperatura $T = 0\,^\circ$C. Calcolare il volume V_2 per il quale si ha la completa fusione del ghiaccio. (Il calore latente di fusione del ghiaccio è $\lambda = 333.5$ J/g).

Soluzione esercizio 1

Il modulo della velocità v_B con cui la massa m si distacca dalla guida, si trova utilizzando la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgR\cos\pi/4\,, \tag{1}$$

da cui

$$v_B = \sqrt{\sqrt{2}gR}\,. \tag{2}$$

La velocità $\mathbf{v}_B$ è diretta lungo la bisettrice del primo quadrante:

$$\mathbf{v}_B = (v_B\cos\pi/4, v_B\sin\pi/4) = v_B\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)\,. \tag{3}$$

Se $R = 1$ m si ottiene $v_B = 3.72$ m/s.

Dal punto B in poi il problema è un problema di balistica. Il punto parte da B con velocità iniziale $\mathbf{v}_B$, sotto l'azione della gravità.
Troviamo la velocità del punto quando tocca terra. L'accelerazione di gravità è diretta lungo la verticale, quindi la componente x della velocità del punto, $v_B\sqrt{2}/2$, si conserva. La componente y è quella di un proiettile sparato con velocità iniziale $v_B\sqrt{2}/2$ dall'altezza $y_B = R(1-\cos\pi/4) = R(2-\sqrt{2})/2$ verso l'alto. L'attimo in cui il punto materiale tocca terra per la prima volta si trova risolvendo l'equazione

$$-\frac{1}{2}gt^2 + v_B\frac{\sqrt{2}}{2}t + R\frac{(2-\sqrt{2})}{2}\,, \tag{4}$$

che dà come risultato (prendiamo la soluzione positiva)

$$t_0 = \frac{\sqrt{2}v_B}{2g} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2v_B^2}{g^2} + \frac{4R}{g}(2-\sqrt{2})}\,. \tag{5}$$

Lungo l'asse delle x il moto è uniforme. Quindi la distanza percorsa dal proiettile quando tocca terra per la prima volta è

$$d_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}v_Bt_0 = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{v_B}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2v_B^2}{g^2} + \frac{4R}{g}(2-\sqrt{2})}\,. \tag{6}$$

Il rimbalzo è elastico, cioè si conserva l'energia cinetica. La componente x della velocità rimane inalterata, mentre invece la componente y cambia semplicemente di segno. Siccome

$$v_y(t_0) = -gt_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}v_B = -\frac{1}{2}\sqrt{2v_B^2 + 4Rg(2-\sqrt{2})}\,, \tag{7}$$

si ha che il secondo rimbalzo parte da $x = d_0$ con velocità iniziale

$$\mathbf{v}_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}v_B\,,\, \frac{1}{2}\sqrt{2v_B^2 + 4Rg(2-\sqrt{2})}\right)\,. \tag{8}$$

Da questo istante in poi il moto è quello di un proiettile che venga sparato dal suolo con velocità iniziale pari a $\mathbf{v}_0$. Quindi il secondo rimbalzo avverrà dopo un tempo

$$t_1 = \frac{2v_{0y}}{g} = \sqrt{\frac{2v_B^2}{g^2} + \frac{4R}{g}(2-\sqrt{2})}\,, \tag{9}$$

a distanza dal primo pari a

$$d_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} v_B t_1 = \frac{v_B}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2v_B^2}{g^2} + \frac{4R}{g}(2-\sqrt{2})}\,. \tag{10}$$

Affinché con il secondo rimbalzo il punto cada in x_0,deve valere la seguente condizione per lo spazio percorso nei due rimbalzi, $d_0 + d_1$:

$$\begin{aligned} x_0 &= d_0 + d_1 = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{3v_B}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2v_B^2}{g^2} + \frac{4R}{g}(2-\sqrt{2})}\,, &(11)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} R \left(1 + 3\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right) &(12) \end{aligned}$$

da cui si ricava il valore di R:

$$R = \frac{\sqrt{2}}{1 + 3\sqrt{2\sqrt{2}-1}} x_0 = 70\,\mathrm{cm}. \tag{13}$$

Soluzione esercizio 2

La velocità angolare del sistema subito dopo l'urto può essere ricavata utilizzando la seconda legge cardinale impulsiva, centrata nel punto O. Le uniche reazioni vincolari impulsive che possiamo avere in seguito all'urto sono concentrate in O, quindi hanno momento nullo rispetto al punto e non contribuiscono alla seconda cardinale.

$$0 = \int M_O dt = \int \dot{L}_O = L_O^{(f)} - L_O^{(i)}\,, \tag{14}$$

da cui

$$L_O^{(f)} = L_O^{(i)}\,, \tag{15}$$

dove

$$\begin{aligned} L_O^{(f)} &= I_O\dot{\theta} = \left(\frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{4}ml^2\right)\dot{\theta} = \frac{l^2}{4}\left(\frac{1}{3}M + m\right)\dot{\theta}\,, &(16)\\ L_O^{(i)} &= \frac{1}{2}mlv\,. &(17) \end{aligned}$$

Da qui si ha

$$I_O\dot{\theta} = \frac{1}{2}mlv \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{mlv}{2I_0} = \frac{2mv}{l\left(\frac{1}{3}M + m\right)} \tag{18}$$

Per trovare τ facciamo uso del teorema delle forze vive:

$$L = -\int \tau d\theta = -\tau\Delta\theta = T_f - T_i = -T_i = -\frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2\,, \tag{19}$$

da cui

$$\tau = \frac{I_O\dot{\theta}^2}{2\Delta\theta}\,. \tag{20}$$

Due giri corrispondono ad un $\Delta\theta = 4\pi$. Quindi

$$\tau = \frac{I_O\dot{\theta}^2}{8\pi} = \frac{m^2v^2}{8\pi\left(\frac{1}{3}M + m\right)} = 0.092\text{ Nm}\,. \tag{21}$$

Soluzione esercizio 3

Non ci sono forze dissipative, quindi si conserva l'energia meccanica del sistema:

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2\,, \tag{22}$$

dove abbiamo indicato con C il centro di massa della sbarra e dove

$$I_C = \frac{1}{12}Ml^2\,. \tag{23}$$

Lungo il piano non vi sono forze esterne che agiscono sul sistema. Quindi si conserva la quantità di moto sia lungo le x che lungo le y:

$$0 = mv_x + Mv_{Cx}\,, \tag{24}$$

$$0 = mv_y + Mv_{Cy}\,, \tag{25}$$

ovvero $\mathbf{v}_C = -\frac{m}{M}\mathbf{v}$ e siccome abbiamo come ipotesi che $\mathbf{v}$ sia parallela all'asse delle y, anche $\mathbf{v}_C$ lo sarà.
Rimane da determinare la velocità angolare della sbarra. Siccome non ci sono forze esterne agenti sul sistema, il loro momento rispetto ad un qualunque punto del piano è nullo. Inoltre, all'istante iniziale il sistema è fermo, quindi il vettore quantità di moto del sistema è nullo ad ogni istante. Di conseguenza, il momento angolare si conserva, rispetto a qualsiasi punto del piano. Prendiamo come polo il centro di massa della sbarretta. Avremo allora

$$L_C^{(f)} = L_C^{(i)}\,. \tag{26}$$

Ma $L_C^{(i)} = 0$ e quindi

$$0 = L_C^{(f)} = I_C\omega - mv\frac{l}{2}\,, \tag{27}$$

ovvero

$$\omega = \frac{mvl}{2I_C} = 6\frac{m}{M}\frac{v}{l}\,. \tag{28}$$

Sostituendo nell'equazione di conservazione dell'energia otteniamo

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{m}{M}\right) + \frac{3}{2}mv^2\left(\frac{m}{M}\right)\,, \tag{29}$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{kA^2}{m\left[1+4\left(\frac{m}{M}\right)\right]}} \tag{30}$$

infine, utilizzando $\frac{m}{M} = \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{7}{6}mv^2 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{3kA^2}{7m}} = 17.75 \text{ m/s}\,. \tag{31}$$

Soluzione esercizio 4

Siccome il ciclo è reversibile, avremo che la variazione di entropia totale è nulla. D'altra parte, il ΔS_{tot} è somma dei singoli ΔS sulle varie trasformazioni intermedie. Lungo le adiabatiche, siccome $\not{d}Q = 0$, l'entropia non varia. Quindi, dette ΔS_1 e ΔS_2 le variazioni di entropia lungo le isoterme a temperatura T_1 e T_2, rispettivamente, avremo che

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 0\,, \tag{32}$$

ovvero

$$\Delta S_1 = -\Delta S_2\,. \tag{33}$$

Il lavoro compiuto dal gas nel ciclo è dato, per il Primo Principio, da

$$L_{tot} = Q_1 + Q_2 = T_1\Delta S_1 + T_2\Delta S_2\,, \tag{34}$$

e quindi, utilizzando la (33)

$$L_{tot} = T_1\Delta S_1 + T_2\Delta S_2 = -\Delta S_2(T_1 - T_2) = -\Delta S_2\,\Delta T = 1000 \text{ J}\,. \tag{35}$$

Soluzione esercizio 5

Il calore ceduto dal gas durante la compressione è dato da

$$Q = nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = nRT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) < 0\,, \tag{36}$$

in quanto $V_2 < V_1$. $T = 273.15$ K.
Dato il calore latente di fusione del ghiaccio λ, la massa di ghiaccio che si scioglie avendo assorbito una quantità di calore $\tilde{Q}$, si ricava dalla relazione

$$\tilde{Q} = m\lambda\,. \tag{37}$$

Nel nostro caso $\tilde{Q} = -Q$. Quindi si ha:

$$m\lambda = \tilde{Q} = -nRT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)\,, \tag{38}$$

da cui si ricava

$$V_2 = V_1 e^{-\frac{m\lambda}{nRT}} = 0.23 \text{ m}^3\,. \tag{39}$$

Esame 29 Settembre 2017

Roberto Bonciani e Paolo Dore

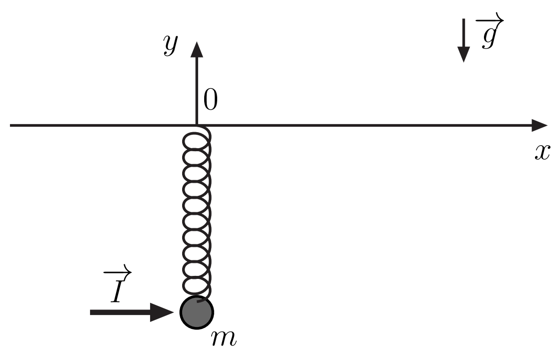
Corso di Fisica Generale 1
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2016-2017

Esame - Fisica Generale I
29 Settembre 2017

R. Bonciani, P. Dore

Esercizio 1

Un punto materiale di massa $m = 500$ g, libero di muoversi in un piano verticale, è collegato al punto fisso O mediante una molla ideale di costante elastica $k = 3$ N/m e lunghezza di riposo trascurabile.

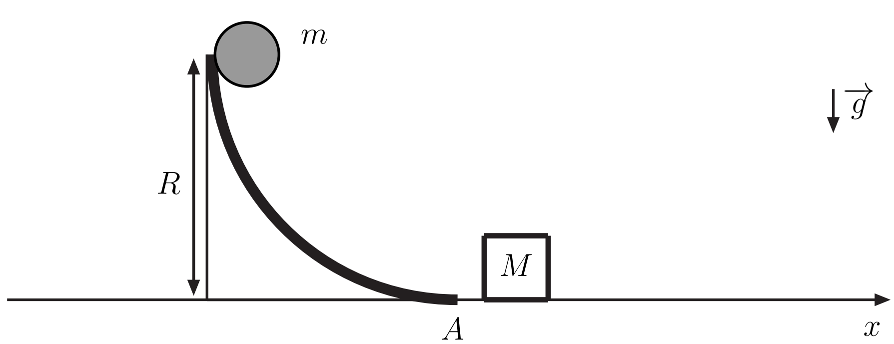


1. Ricavare la posizione di equilibrio.

2. A $t = 0$ la pallina si trova in posizione di equilibrio e riceve un impulso $\vec{I}$ orizzontale di modulo pari a $I = 2.5$ N s. Ricavare l'equazione del moto.

Esercizio 2

Un disco di raggio $r = 20$ cm e massa $m = 1.0$ kg è vincolato a rotolare senza strisciare su una guida a forma di quarto di circonferenza di raggio $R = 80$ cm, disposta in un piano verticale (vedi figura). La superficie di contatto fra disco e guida è scabra (rappresentata in figura dalla linea in grassetto). La guida si raccorda in maniera continua e derivabile al piano orizzontale determinato dall'asse x in figura. Dal punto A in poi, il vincolo è liscio. A distanza r da A è posto un blocco di massa $M = 2.0$ kg, vincolato a muoversi sul piano orizzontale senza attrito e a non distaccarsene mai.



Al tempo $t = 0$ il disco viene lasciato da fermo nella posizione in figura, cioè in contatto con la guida e col centro di massa ad altezza R dal suolo. Rotolando (di rotolamento puro) arriva in A ed urta il blocco di massa M in maniera completamente elastica. Fra disco e blocco non c'è attrito. Durante l'urto il vincolo di rotolamento puro è preservato.

1. Con che velocità del centro di massa il disco arriva nella posizione dell'urto?
2. Qual'è la velocità del blocco dopo l'urto?
3. Qual'è l'altezza massima a cui il centro di massa del disco arriva risalendo la guida dopo l'urto?

Esercizio 3

Due moli di gas perfetto monoatomico lavorano come macchina termica compiendo cicli di Carnot fra due sorgenti di temperatura $T_c = 400\,^\circ$ K e $T_f = 200\,^\circ$ K. Il lavoro prodotto viene utilizzato per mettere in rotazione una turbina, che ha la forma di un cilindro omogeneo di massa $M = 40$ kg e raggio $r = 80$ cm, che gira intorno al proprio asse. Dopo $N_c = 3$ cicli esatti, la turbina ha acquistato una frequenza di rotazione di 5 giri/s. Trovare il rapporto V_B/V_A, dove V_A e V_B sono i volumi del gas negli stati A e B corrispondenti allo stato iniziale e finale della trasformazione isoterma che il gas subisce quando è a contatto con la sorgente calda.

Soluzione esercizio 1

1. La posizione di equilibrio del punto soggetto alle forze in gioco è data da

$$\begin{aligned} 0 &= -ky - mg\,, & (1)\\ 0 &= -kx\,, & (2) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} x_{eq} &= 0\,, & (3)\\ y_{eq} &= -\frac{mg}{k} = -1.635 \text{ m}\,. & (4) \end{aligned}$$

2. Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx\,, & (5)\\ m\ddot{y} &= -ky - mg = -k(y - y_{eq})\,, & (6) \end{aligned}$$

con soluzione

$$\begin{aligned} x(t) &= A_x \cos(\omega t + \phi_x)\,, & (7)\\ y(t) &= y_{eq} + A_y \cos(\omega t + \phi_y)\,, & (8) \end{aligned}$$

dove $\omega = \sqrt{k/m}$.

Per trovare le condizioni iniziali sulla velocità, basta utilizzare il fatto che se il punto riceve l'impulso $\mathbf{I}$, partirà con una velocità pari a

$$\mathbf{v}(0) = \frac{\mathbf{I}}{m}\,, \tag{9}$$

ovvero con una velocità diretta lungo le x con verso positivo e modulo pari a

$$v(0) = \frac{I}{m} = 5 \text{ m/s}\,. \tag{10}$$

Imponendo le condizioni iniziali sul moto si ottiene:

$$\begin{aligned} x(0) &= A_x \cos\phi_x = 0\,, & (11)\\ y(0) &= y_{eq} + A_y \cos\phi_y = y_{eq}\,, & (12)\\ \dot{x}(0) &= -A_x\omega \sin\phi_x = v_0\,, & (13)\\ \dot{y}(0) &= -A_y\omega \sin\phi_y = 0\,, & (14) \end{aligned}$$

sistema che ha come soluzione

$$\begin{aligned} \phi_x &= \frac{\pi}{2}\,, & (15)\\ A_x &= -\frac{v_0}{\omega}\,, & (16)\\ \phi_y &= qualsiasi\,, & (17) \end{aligned}$$

$$A_y = 0\,. \tag{18}$$

Il moto è quindi dato da

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)\,, \tag{19}$$

$$y(t) = y_{eq}\,. \tag{20}$$

Cioè il punto si muove con moto armonico solo nella direzione x ad una quota pari alla quota di equilibrio.

Soluzione esercizio 2

1. Il vincolo di ritolamento puro non dissipa energia (non si compie lavoro) per cui possiamo determinare la velocità con cui il centro di massa del disco arriva nella posizione A utilizzando la conservazione dell'energia.

   A $t = 0$ il disco è fermo ad altezza R da terra, quindi l'energia meccanica è costituita dalla sola energia potenziale. Prendendo lo zero dell'energia potenziale alla quota $y = r$ si ha

   $$V = mg(R - r)\,. \tag{21}$$

   Quando il disco raggiunge A, la sua energia meccanica è data dall'energia cinetica

   $$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 = \frac{3}{4}mv_c^2\,, \tag{22}$$

   dove abbiamo utilizzato il fatto che

   $$I_c = \frac{mr^2}{2} \tag{23}$$

   e

   $$\omega = \frac{v_c}{r}\,, \tag{24}$$

   che viene dal rotolamento puro.

   Uguagliando l'energia meccanica iniziale a quella finale si ottiene

   $$v_c = \sqrt{\frac{4}{3}g(R - r)} = 2.80 \text{ m s}^{-1}\,. \tag{25}$$

   Inoltre $\mathbf{v}_c$ è diretta lungo l'asse delle x con verso positivo.

2. Se indichiamo con $\mathbf{v}_c'$ la velocità del centro di massa del disco subito dopo l'urto e con $\mathbf{V}$ la velocità del blocco sempre subito dopo l'urto, abbiamo che entrambe saranno dirette lungo l'asse delle x.

   Siccome l'urto è elastico, l'energia cinetica nell'urto si conserva. Possiamo quindi scrivere che

   $$\frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 = \frac{1}{2}mv_c'^2 + \frac{1}{2}I_c\omega'^2 + \frac{1}{2}MV^2\,, \tag{26}$$

dove

$$\omega' = \frac{v_c'}{r}\,, \tag{27}$$

ovvero

$$\frac{3}{4}mv_c^2 = \frac{3}{4}mv_c'^2 + \frac{1}{2}MV^2\,. \tag{28}$$

Per determinare le due velocità v_c' e V abbiamo bisogno di un'altra equazione. Siccome sussiste il vincolo di rotolamento puro fra disco e guida, la quantità di moto NON si conserva nell'urto. Dobbiamo allora analizzare le cardinali nel limite impulsivo.

Durante l'urto, il disco comunica un impulso $\mathbf{J}$ al blocco il quale reagisce con un impulso $-\mathbf{J}$ sul disco. In conseguenza di ciò, il blocco si mette in moto con velocità $\mathbf{V} = V\hat{\imath}$. Allora

$$J = MV\,. \tag{29}$$

Applichiamo adesso la seconda cardinale impulsiva al disco, scegliendo come centro di riduzione il punto del disco coincidente con A, che è fermo. In questo modo poniamo direttamente a zero il momento delle forze impulsive che agiscono per mantenere il vicnolo di rotolamento puro e che agiscono per forza di cose sul quel punto. Prendendo come verso positivo di rotazione quello orario (per il quale sia v_c che ω sono positivi), si ha

$$-Jr = \Delta L_A = I_A\omega' - I_A\omega = \frac{3}{2}mr(v_c' - v_c)\,. \tag{30}$$

Quindi, la seconda equazione che cercavamo è la

$$-MV = \frac{3}{2}m(v_c' - v_c)\,, \tag{31}$$

da cui

$$V = \frac{3}{2}\frac{m}{M}(v_c - v_c')\,, \tag{32}$$

che sostituita nella (28) dà un'equazione di secondo grado per determinare v_c':

$$\left(\frac{9}{2}\frac{m^2}{M} + 3m\right)v_c^2 - \frac{9m^2v_c}{M}v_c' + \left(\frac{9}{2}\frac{m^2}{M} - 3m\right)v_c^2 = 0\,. \tag{33}$$

Le due soluzioni sono

$$v_c' = v_c\,, \tag{34}$$

$$v_c' = \frac{3m - 2M}{3m + 2M}v_c\,. \tag{35}$$

La prima soluzione non è accettabile in quanto il disco dovrebbe continare con la stessa velocità, quindi l'urto non avrebbe luogo. Scegliamo la seconda soluzione si ha:

$$v_c' = \frac{3m - 2M}{3m + 2M}v_c = -\frac{1}{7}v_c = -1.06 \text{ m s}^{-1}\,, \tag{36}$$

$$V = \frac{3}{2}\frac{m}{M}(v_c - v_c') = \frac{6m}{3m + 2M}v_c = \frac{6}{7}v_c = 2.59 \text{ m s}^{-1}\,. \tag{37}$$

Con questi valori delle masse, il disco arriva sul blocco con una certa velocità v_c e, in seguito all'urto, il blocco parte con velocità positiva, mentre il disco rimbalza e torna indietro risalendo per un tratto la guida.

3. L'altezza h a cui il centro di massa del disco risale sarà tale che

$$mgh = \frac{1}{2}mv_c'^2 + \frac{1}{2}I_c\omega'^2 + mgr = \frac{3}{4}mv_c'^2 + mgr\,, \tag{38}$$

da cui

$$h = \frac{3}{4}\frac{v_c'^2}{g} + r = 29 \text{ cm}\,. \tag{39}$$

Soluzione esercizio 3

Il lavoro fatto per portare alla velocità angolare data la turbina si può calcolare col teorema delle forze vive. Si ha

$$L_0 = T_f - T_i = T_f = \frac{1}{2}I\omega^2\,. \tag{40}$$

Il momento d'inerzia della turbina rispetto al proprio asse è

$$I = \frac{1}{2}Mr^2 = 12.8 \text{ kg m}^2\,. \tag{41}$$

Se la frequenza finale della turbina è di $\nu = 5$ giri/s, si ha

$$\omega = 2\pi\nu = 31.4 \text{ s}^{-1}\,. \tag{42}$$

Quindi

$$L_0 = 6316.55 \text{ J}\,. \tag{43}$$

Se un ciclo di Carnot produce il lavoro L, dopo N_c cicli verrà prodotto il lavoro totale

$$L_{tot} = N_c L \equiv L_0\,. \tag{44}$$

Il lavoro di un ciclo sarà dato dalla relazione

$$L = \eta Q_c = \left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) Q_c\,, \tag{45}$$

dove Q_c è il calore assorbito dal gas durante la trasformazione isoterma a $T = T_c$

$$Q_c = nRT_c \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \tag{46}$$

e quindi

$$L_0 = N_c\left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) nRT_c \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right). \tag{47}$$

Il rapporto fra i volumi è dato quindi da

$$\frac{V_B}{V_A} = \exp\left\{\frac{L_0}{\left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) nN_cRT_c}\right\} = 1.88\,. \tag{48}$$

Esonero 17 Novembre 2017

Roberto Bonciani e Paolo Dore

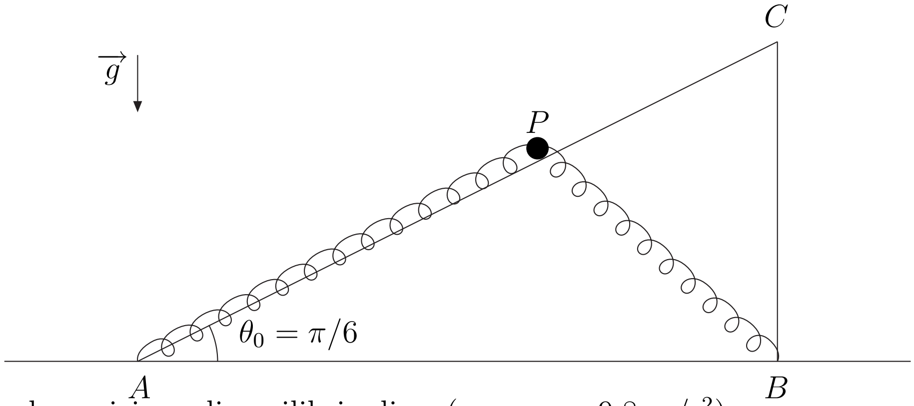
Corso di Fisica Generale 1

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Anno Accademico 2017-2018

Esercizio 1

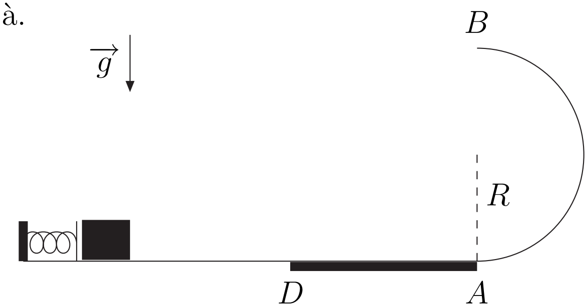
Un punto materiale P di massa $m = 1$ kg è appoggiato su un piano liscio, inclinato sull'orizzontale di un'angolo $\theta_0 = \pi/6$. Il piano inclinato forma un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa pari ad $\overline{AC} = l = 1$ m. Il punto materiale è collegato a B e ad A tramite due molle ideali di costante elastica $k = 19.6$ N/m e lunghezza di riposo nulla.



1. Trovare la posizione di equilibrio di m (usare $g = 9.8$ m/s^2).
2. Scrivere e risolvere l'equazione del moto, supponendo che il punto materiale venga lasciato da fermo in A.

Esercizio 2

Un carrello di massa $m = 100$ g è appoggiato ad una piattaforma collegata al muro da una molla ideale di costante elastica $k = 100$ N/m. Il carrello è vincolato a scorrere (senza potersene distaccare, neanche nel tratto AB) su un binario orizzontale che termina con un tratto semicircolare di raggio $R = 80$ cm liscio, posto in un piano verticale. Il moto si svolge in presenza di gravità.



Inizialmente la molla è contratta di Δx e il tutto viene tenuto fermo da un opportuno gancio. Ad un certo istante il gancio viene rimosso e il carrello comincia a percorrere il tratto orizzontale del binario. Prima di arrivare in A, il carrello incontra un tratto lungo $DA = L = 1$ m di binario in cui agisce un attrito radente, con coefficiente $\mu_d = 0.4$. Il carrello inizia poi a percorrere il tratto semicircolare del binario, che è liscio.

1. Determinare il Δx_{min} minimo affinché il carrello arrivi in B con velocità non nulla.
2. Supponendo $\Delta x > \Delta x_{min}$, il carrello uscendo dalla guida in B cadrà sul binario in un punto C. Determinare la distanza AC in funzione di Δx.

1 Soluzione Esercizio 1

Per trovare la posizione di equilibrio minimizziamo l'energia potenziale.

Detta x la coordinata del punto P lungo il segmento AB, avendo posto l'origine coincidente con A, si ha

$$\overline{AP}^2 = x^2 \,, \tag{1}$$
$$\overline{BP}^2 = [(l-x)\cos\theta_0]^2 + [x\sin\theta_0]^2 = l^2\cos^2\theta_0 - 2lx\cos\theta_0 + x^2 \,. \tag{2}$$

L'energia potenziale sarà data dalla somma delle energie potenziali delle due molle e della forza di gravità:

$$V = mgx\sin\theta_0 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\left[l^2\cos^2\theta_0 - 2lx\cos^2\theta_0 + x^2\right] \,, \tag{3}$$
$$= kx^2 + \left(mg\sin\theta_0 - kl\cos^2\theta_0\right)x + \frac{1}{2}kl^2\cos^2\theta_0 \,. \tag{4}$$

dove abbiamo posto lo zero dell'energia potenziale di gravità al suolo e quello dell'energia potenziale elastica rispettivamente sui due punti di equilibrio delle molle.

Allora

$$\frac{dV}{dx} = 2kx + \left(mg\sin\theta_0 - kl\cos^2\theta_0\right) = 0 \,, \tag{5}$$

che dà come soluzione

$$x_{eq} = \frac{1}{2k}\left(kl\cos^2\theta_0 - mg\sin\theta_0\right) = \frac{3}{8}l - \frac{mg}{4k} = 0.25 \text{ m} \,. \tag{6}$$

Per vedere se il punto è di equilibrio stabile oppure no, facciamo la derivata seconda:

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_{eq}} = 2k > 0 \,, \tag{7}$$

quindi il punto è di equilibrio stabile.

Si può trovare il punto di equilibrio anche usando la prima cardinale della statica.

Per trovare l'equazione del moto, mettiamoci in un sistema di riferimento in cui l'asse delle x coincide col segmento AC, con origine in A e verso positivo da A a C e l'asse delle y di conseguenza, con verso positivo verso l'alto.

Lungo le y l'accelerazione è nulla e otteniamo il comportamento della reazione vincolare

$$N = mg\cos\theta_0 + kl\cos\theta_0\sin\theta_0 \,. \tag{8}$$

Lungo le x invece abbiamo

$$m\ddot{x} = -kx - mg\sin\theta_0 + k\left(l\cos^2\theta_0 - x\right) = -2kx - mg\sin\theta_0 + kl\cos^2\theta_0 \,, \tag{9}$$

ovvero

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x + g\sin\theta_0 - \frac{kl}{m}\cos^2\theta_0 = 0 \,, \tag{10}$$

o anche

$$\ddot{x} + 2\frac{k}{m}(x - x_{eq}) = 0\,. \tag{11}$$

Il moto è un moto armonico con pulsazione

$$\omega = \sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\,, \tag{12}$$

intorno al punto $x = x_{eq}$ con ampiezza data dalle condizioni iniziali.

$$x(t) = x_{eq} + A\cos(\omega t + \phi)\,, \tag{13}$$

con A e ϕ tali che:

$$x_{eq} + A\cos\phi = 0\,, \tag{14}$$
$$-A\omega\sin\phi = 0\,, \tag{15}$$

che dà

$$\phi = 0\,, \tag{16}$$
$$A = -x_{eq}\,. \tag{17}$$

Infine la soluzione è

$$x(t) = x_{eq}(1 - \cos(\omega t))\,. \tag{18}$$

2 Soluzione Esercizio 2

Il carrello m viene sparato dalla molla con velocità v tale che valga la conservazione dell'energia meccanica

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}k\Delta x^2\,, \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x\,. \tag{19}$$

ovvero

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x\,. \tag{20}$$

Attraversando il tratto $DA = L$ perde energia e quindi riduce la sua velocità, fino al valore v_1 con cui impegna la parte semicircolare del binario. Per il teorema delle forze vive si ha

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_D^A \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{r} = -\mu_d mgL\,, \tag{21}$$

per cui

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu_d L} = \sqrt{\frac{k}{m}\Delta x^2 - 2\mu_d gL}\,. \tag{22}$$

Indichiamo con θ l'angolo che la massa m fa con la verticale mentre risale la parte circolare del binario. La velocità sarà funzione di θ e si otterrà sempre utilizzando la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1 - \cos\theta)\,, \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{v_1^2 - 2gR(1 - \cos\theta)}\,. \tag{23}$$

Quindi affinché il carrello arivi in B con velocità non nulla si deve avere

$$v|_{\theta=\pi} = \sqrt{v_1^2 - 4gR} > 0\,, \tag{24}$$

cioè

$$v_1^2 = \frac{k}{m}\Delta x^2 - 2\mu_d g L > 4gL\,. \tag{25}$$

La (25) porta alla seguente relazione su Δx:

$$\Delta x > \sqrt{\frac{mg}{k}(4R + 2\mu_d L)} = \Delta x_{min} = 19.8\ \mathrm{cm}\,. \tag{26}$$

Se $\Delta x > \Delta x_{min}$, il carrello esce dal binario in B, di coordinate $x_B = 0$, $y_B = 2R$, con velovità pari in modulo a

$$v_B = \sqrt{v_1^2 - 4gR} = \sqrt{\frac{k}{m}\Delta x^2 - 2\mu_d g L - 4gR}\,, \tag{27}$$

diretta lungo le x negative:

$$\mathbf{v}_B = -\left(\sqrt{v_1^2 - 4gR}\right)\hat{\imath}\,. \tag{28}$$

La distanza AC dal centro del SdR al punto di caduta sul binario orizzontale è

$$\overline{AC} = v_B t_{caduta} = v_B\sqrt{\frac{4R}{g}} = 2\sqrt{\frac{kR}{mg}\Delta x^2 - 2\mu_d L R - 4R^2}\,. \tag{29}$$

Esonero 19 Gennaio 2018

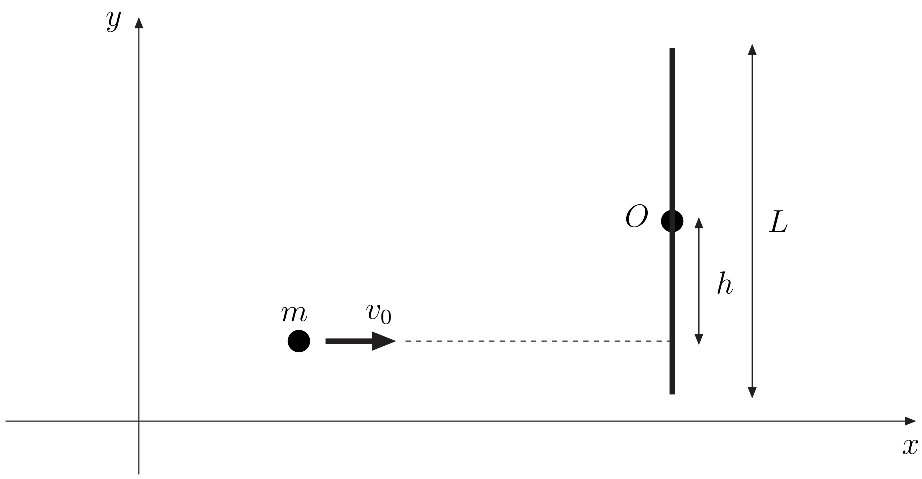
Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2017-2018

Secondo Esonero di Fisica Generale 1 per Matematici
R. Bonciani, P. Dore
19 Gennaio 2018

Esercizio 1

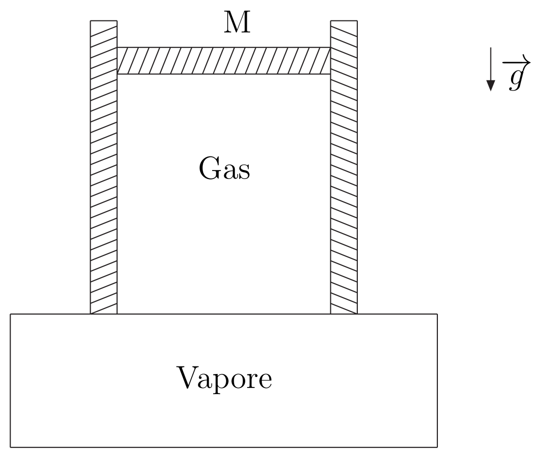
Una sbarretta omogenea di massa $m = 3.0$ kg e lunghezza $L = 60$ cm si trova su un piano orizzontale xy liscio ed è fissata a questo tramite un perno conficcato nel suo centro di massa O. La sbarretta, inizialmente ferma, viene colpita ad una distanza $h = L/3$ dal suo centro di massa, in direzione ortigonale alla sbarretta stessa, da un proiettile di massa $m_p = m/4$ che urta la sbarretta a velocità $v_0 = 2.0$ m/s.



1. L'urto fra proiettile e sbarretta è completamente anelastico e il proiettile si conficca nella sbarretta. In questa situazione, si determini:
   a la velocità angolare del sistema sbarretta+proiettile subito dopo l'urto;
   b l'angolo spazzato dal sistema sbarretta+proiettile prima di fermarsi, sapendo che il perno agisce sulla sbarretta con un attrito che si può schematizzare con un momento costante $M = 1.2$ Nm che si oppone al moto del sistema.
2. L'urto fra proiettile e sbarretta è elastico. In questa situazione si determini:
   a La velocità del proiettile e la velocità angolare della sbarra subito dopo l'urto;
   b l'angolo spazzato dalla sbarretta prima di fermarsi, sapendo che il perno agisce comunque con l'attrito descritto al punto precedente.

Esercizio 2

Una mole di gas perfetto è contenuta in un cilindro, messo in verticale, a pareti laterali adiabatiche e base conduttrice. Il cilindro è chiuso da un pistone adiabatico di massa $M = 325.8$ kg, libero di scorrere senza attrito. Il sistema gas+cilindro+pistone si trova in un ambiente con pressione esterna trascurabile ed è sottoposto all'azione della forza di gravità (si consideri $g = 9.81$ m s^{-2}). Inizialmente il sistema è in equilibrio alla temperatura $T_i = 22$ °C. La base conduttrice del cilindro viene messa in contatto termico con un recipiente contenente vapore acqueo a $T = 100$ °C, che può scambiare calore solo col cilindro. Tutto il sistema, gas+cilindro+recipiente (che quindi risulta termicamente isolato) si porta molto rapidamente ad una nuova condizione di equilibrio alla temperatura finale $T_f = 100$ °C (si trascuri comunque la capacità termica del cilindro). Al termine della trasformazione (irreversibile), il pistone si è alzato di $h = 20$ cm e nel recipiente una massa di vapore $m = 1$ g è passata dalla fase gassosa alla fase liquida (acqua).



Sapendo che il calore latente di evaporazione del l'acqua è $\lambda = 540$ cal/g si calcoli:

1. il calore Q scambiato nella trasformazione;
2. il calore specifico molare del gas e si determini di conseguenza la natura dello stesso (se monoatomico o biatomico);

1 Soluzione Esercizio 1

1. Essendo l'urto anelastico su un sistema vincolato, in generale non si conserva nessuna quantità. Però, la reazione vincolare impulsiva per forza di cose è concentrata sul perno O. Quindi, calcolando i momenti rispetto ad O, avremo che, integrando la seconda Cardinale
$$\int \tau_O \, dt = 0 = \int \dot{L}_O \, dt = L_O^f - L_O^i \,, \tag{1}$$
dove τ_O è il momento delle forze esterne che agiscono sul sistema rispetto ad O, L_O^i è il momento della quantità di moto iniziale rispetto ad O e L_O^f è il momento finale. Quindi
$$L_O^f = L_O^i \,. \tag{2}$$
Abbiamo
$$L_O^i = m_p v_0 h \tag{3}$$
$$L_O^f = I_O^{tot}\omega = (I_{O,sbarr} + I_{O,proiet})\omega = \left(\frac{mL^2}{12} + \frac{m}{4}\frac{L^2}{9}\right)\omega = \frac{1}{9} m L^2 \omega \,, \tag{4}$$
dove abbiamo preso come verso positivo della rotazione quello antiorario. Si ricava così
$$\omega = 9\frac{m_p}{m}\frac{v_0 h}{L^2} = \frac{3}{4}\frac{v_0}{L} = 2.5 \text{ s}^{-1} \,. \tag{5}$$
Utilizzando il teorema delle forze vive, si trova che il lavoro L_{if} fatto dalla forza d'attrito per fermare la sbarreta col proiettile è dato dalla differenza di energia cinetica del sistema fra lo stato finale e iniziale:
$$L_{if} = T_f - T_i = -T_i = -\frac{1}{2} I_O^{tot}\omega^2 = -\frac{1}{18} m L^2 \omega^2 = -\frac{1}{32} m v_0^2 \,. \tag{6}$$
D'altra parte, essendo il momento applicato sul sistema costante, si ha
$$L_{if} = -\int_0^\theta M \, d\theta' = -M \int_0^\theta d\theta' = -M\,\theta \,. \tag{7}$$
Infine
$$\theta = \frac{1}{32}\frac{m v_0^2}{M} = 0.31 \text{ rad} \,. \tag{8}$$

2. Consideriamo adesso l'urto elastico. Dopo l'urto il proiettile avrà velocità v_f che può soltanto essere diretta lungo l'asse delle x (come la velocità iniziale). Quindi abbiamo un'incognita in più nel problema. Essendo l'urto elastico, però, abbiamo anche un'equazione aggiuntiva derivante dalla conservazione dell'energia cinetica durante l'urto. Allora possiamo scrivere due equazioni
$$L_O^f = L_O^i \,, \tag{9}$$
$$T_f = T_i \,, \tag{10}$$

dove

$$\begin{aligned} L_O^i &= m_p v_0 h && (11)\\ L_O^f &= I_{O,sbarr}\omega - m_p v_f = \frac{mL^2}{12}\omega - m_p v_f h\,, && (12)\\ T_i &= \frac{1}{2}m_p v_0^2\,, && (13)\\ T_f &= \frac{1}{2}m_p v_f^2 + \frac{1}{2}I_{O,sbarr}\omega^2\,, && (14)\end{aligned}$$

e $I_{O,sbarr} = mL^2/12$. In Eq. (12) abbiamo genericamente considerato la velocità finale del proiettile diretta verso le x negative (nel nostro SdR, $\mathbf{v}_f = -v_f\hat{\imath}$). Ciò verrà confermato o meno dalla soluzione del sistema (a seconda che v_f venga positivo o negativo). Allora

$$\begin{aligned} m_p v_0 h &= \frac{mL^2}{12}\omega - m_p v_f h\,, && (15)\\ \frac{1}{2}m_p v_0^2 &= \frac{1}{2}m_p v_f^2 + \frac{1}{24}mL^2\omega^2\,. && (16)\end{aligned}$$

Dalla prima equazione si ottiene

$$\omega = 12\frac{m_p h}{mL^2}(v_f + v_0) = \frac{1}{L}(v_f + v_0)\,. \tag{17}$$

Sostituendo nella seconda si ha

$$3(v_0^2 - v_f^2) = (v_0 + v_f)^2\,, \tag{18}$$

cioè

$$v_f = \frac{1}{2}v_0 = 1\ \text{m/s}\,. \tag{19}$$

Il proiettile rimbalza e torna indietro con velocità pari a metà della velocità iniziale.

La velocità angolare sarà quindi

$$\omega = \frac{3}{2}\frac{v_0}{L} = 5.0\ \text{s}^{-1}\,, \tag{20}$$

doppia rispetto alla ω dell'urto anelastico.

Usando il teorema delle forze vive si ottiene

$$\theta = \frac{I_{O,sbarr}}{2M}\omega^2 = \frac{3}{32}\frac{mv_0^2}{M} = 0.93\ \text{rad}\,. \tag{21}$$

2 Soluzione Esercizio 2

1. Il gas, che passa dallo stato i allo stato f, assorbe una certa quantità di calore e si espande. La stessa quantità di calore assorbita è stata ceduta dalla sorgente, costituita dal vapore acqueo che in corrispondenza di questa cessione di calore subisce una trasformazione di fase: una massa m di vapore condensa e la temperatura rimane costante. Nella condensazione, la sorgente cede quindi la quantità di calore

$$\|Q_{ced}\| = \lambda m = 540\ \text{cal} = 2260.44\ \text{J}\,. \tag{22}$$

2. Per trovare il calore specifico molare del gas, consideriamo il fatto che, indipendentemente dalla pressione del gas, il lavoro che fa è contro la pressione costante derivante dal cilindro soggetto alla forza di gravità. Quindi

$$L_{gas} = -L_{grav} = \int_0^h Mg\, dy = Mgh\,. \tag{23}$$

Per il Primo Principio si ha

$$đQ = \tilde{c}_V dT + đL\,, \tag{24}$$

dove $\tilde{c}_V$ è il calore specifico molare a volume costante del gas, parametro che vogliamo determinare. Integrando la (24), si trova la quantità di calore assorbita dal gas

$$Q_{ass} = \tilde{c}_V(T_f - T_i) + \int đL = \tilde{c}_V(T_f - T_i) + Mgh\,, \tag{25}$$

dove abbiamo $Q_{ass} = \|Q_{ced}\|$. Allora, dalla (25) possiamo determinare $\tilde{c}_V$

$$\tilde{c}_V = \frac{\|Q_{ced}\| - Mgh}{(T_f - T_i)} = 20.7849 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \simeq 2.5\ R = \frac{5}{2}\ R\,. \tag{26}$$

Dalla relazione trovata se ne deduce che il gas in questione è biatomico.

Esame 29 Gennaio 2018

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

Dipartimento di Matematica

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

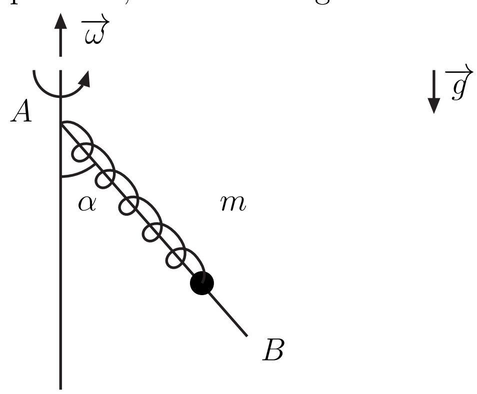
Anno Accademico 2017-2018

Regole per lo scritto:

- RECUPERO 1° ESONERO: risolvere gli esercizi 1 e 2 in 2h.
- RECUPERO 2° ESONERO: risolvere gli esercizi 3 e 4 in 2h.
- COMPITO: risolvere gli esercizi 1, 3 e 4 in 3h.

Esercizio 1 $*$

Una pallina di massa $m = 20$ g è vincolata a muoversi su una guida rettilinea inclinata di un angolo $\alpha = \pi/6$ FISSO rispetto alla verticale, intorno a cui ruota con velocità angolare $\omega = 2$ rad/s costante. La pallina è inoltre collegata tramite una molla di costante elastica $k = 1$ N/m e lunghezza di riposo nulla al punto A, indicato in figura.

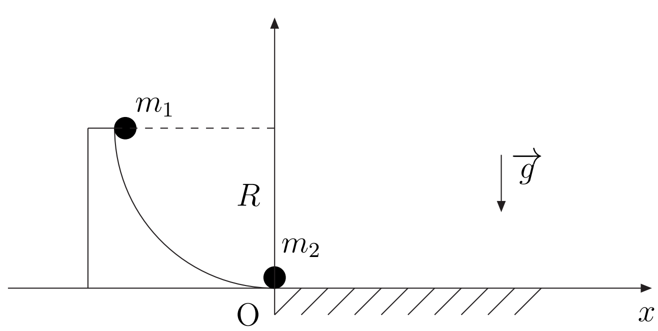


Calcolare:

1. la posizione di equilibrio della pallina, ferma rispetto al sistema di riferimento in moto;
2. la reazione vincolare esercitata dalla guida nella posizione di equilibrio;
3. il periodo delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio.

Esercizio 2

Un punto materiale di massa $m_1 = 500$ g viene lasciato da fermo alla sommità di una guida liscia costituita da un quarto di cerchio di raggio $R = 1$ m, posta su un piano verticale. Nel punto in cui tale guida si raccorda al piano orizzontale, è posto un altro punto materiale di massa $m_2 = 2m_1$. Il piano orizzontale è scabro e il coefficiente d'attrito dinamico fra punti materiali e piano è $\mu = 0.4$. Quando m_1 arriva in O, urta (con velocità orizzontale) la massa m_2.

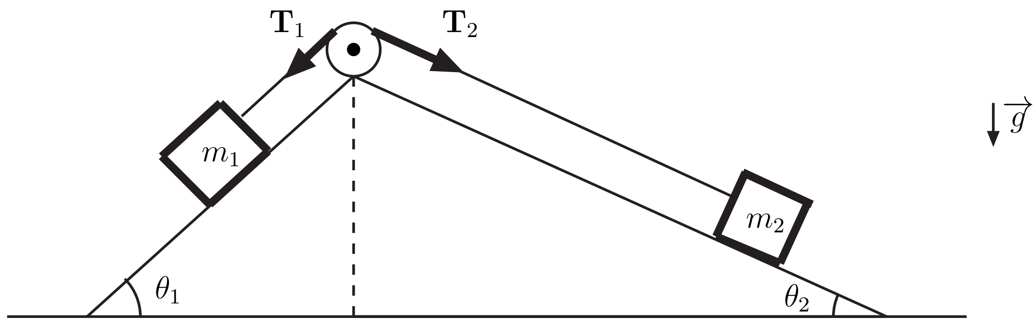


1. Supponendo che l'urto fra m_1 e m_2 sia completamente anelastico, calcolare lo spazio di frenata del sistema costituito dai due punti.
2. Se l'urto è completamente elastico, trovare il moto di m_1 e m_2 dopo l'urto.

****

Esercizio 3 $*$

Due piani inclinati sono disposti come in figura.



Due blocchi di masse $m_1 = 1$ kg e $m_2 = 3$ kg collegati da un filo ideale che passa per la carrucola C si muovono sui due piani inclinati di $\theta_1 = \pi/3$ e $\theta_2 = \pi/6$ rispettivamente, in maniera tale che m_2 scenda e m_1 salga. La carrucola, costituita da un disco di raggio $R = 40$ cm e massa $M = 500$ g è tale che fra filo e carrucola ci sia attrito sufficiente a far sì che il filo non strisci rispetto alla carrucola.

1. Determinare il modulo a dell'accelerazione dei due blocchi.
2. Dati θ_1 e θ_2, quale deve essere il rapporto m_2/m_1 affinché il moto avvenga con velocità costante?
3. Se la carrucola è arrugginita e quindi nel suo moto sperimenta un momento frenante costante $\tau = 1$ Nm, come cambia a?

NB. Si mette in evidenza il fatto che, come indicato in figura, le due tensioni T_1 e T_2 sono diverse fra loro.

Esercizio 4 $*$

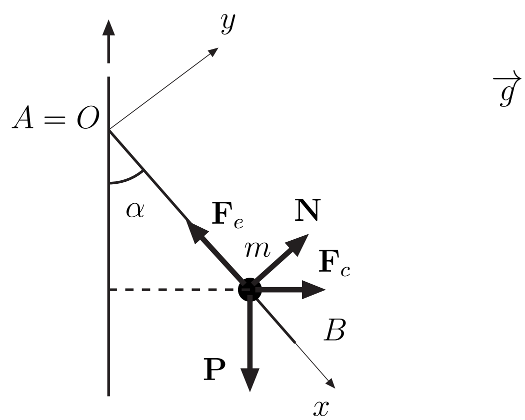
Tre moli di gas perfetto biatomico sono in equilibrio nello stato A. Tramite un'espansione isobara reversibile il gas si porta nello stato B e poi con una adiabatica irreversibile il gas si porta nello stato C con una variazione di energia interna $\Delta U_{BC} = -3000$ J. Infine, con una isoterma reversibile, nella quale scambia con l'ambiente una quantità di calore $Q_{CA} = -3600$ J, il gas torna nello stato A.

Sapendo che $V_A/V_C = 0.2$, determinare:

1. il diagramma del ciclo nel piano di Clapeyron;
2. il valore di T_C e T_B;
3. il rendimento del ciclo;
4. la variazione di entropia del gas nella trasformazione BC, ΔS_{BC}.

Soluzione esercizio 1

Mettiamoci nel SdR non inerziale, che ruota solidalmente con la guida. Inoltre, prendiamo l'asse x lungo la guida e l'asse delle y perpendicolare a questa. Il punto è individuato dalla sua coordinata x. Il sistema di forze che agisce sul punto è rappresentato in figura.



C'è la forza peso, la reazione vincolare (normale alla guida poiché il vincolo è liscio), la forza centrifuga e la forza di richiamo elastico.

1. Per trovare il punto di equilibrio basta applicare la prima cardinale della statica, scomposta lungo le due direzioni x e y.

   Lungo le x abbiamo:
$$P \cos\alpha + F_c \sin\alpha = F_e \,, \tag{1}$$
   dove
$$\begin{aligned} P &= mg\,, &(2)\\ F_c &= m\omega^2 x \sin\alpha\,, &(3)\\ F_e &= k\,x\,. &(4) \end{aligned}$$
   Quindi
$$x_{eq} = \frac{mg\cos\alpha}{k - m\omega^2\sin^2\alpha} = 0.17 \text{ m}\,. \tag{5}$$

2. La reazione vincolare è N, che possiamo ricavare dalla componente y della cardinale
$$\begin{aligned} N &= mg\sin\alpha - m\omega^2 x_{eq}\sin\alpha\cos\alpha\,, &(6)\\ &= mg\sin\alpha - m\omega^2\frac{mg\cos\alpha}{k - m\omega^2\sin^2\alpha}\sin\alpha\cos\alpha\,, &(7)\\ &= 0.09 \text{ N}\,. &(8) \end{aligned}$$

3. L'equazione del moto nel SdR non inerziale è
$$m\ddot{x} = mg\cos\alpha + m\omega^2 x\sin^2\alpha - kx = mg\cos\alpha - (k - m\omega^2\sin^2\alpha)x \tag{9}$$
   Se consideriamo la variabile
$$\xi = x - x_{eq} = x - \frac{mg\cos\alpha}{k - m\omega^2\sin^2\alpha}\,, \tag{10}$$

abbiamo $\dot{\xi} = \dot{x}$, $\ddot{\xi} = \ddot{x}$ e quindi l'equazione del moto diventa:

$$\ddot{\xi} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha \right) \xi = 0 \,. \tag{11}$$

Il periodo sarà dato da

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha\right)}} = 0.9 \text{ s} \,. \tag{12}$$

Soluzione esercizio 2

Siccome l'arco di circonferenza è liscio, per trovare la velocità di m_1 in O si può utilizzare la conservazione dell'energia meccanica:

$$m_1 g R = \frac{1}{2} m_1 v_O^2 \,, \tag{13}$$

cioè

$$v_O = \sqrt{2gR} = 4.43 \text{ m} \quad \text{s}^{-1} \,. \tag{14}$$

La velocità così trovata è diretta lungo le x.

1. Nell'istante dell'urto non ci sono forze esterne impulsive che agiscono sul sistema $m_1 + m_2$ lungo le x. Quindi si conserva la componente x della quantità di moto

   $$m_1 v_O = (m_1 + m_2) v \,, \tag{15}$$

   da cui

   $$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_O = \frac{1}{3} v_O = 1.48 \text{ m} \quad \text{s}^{-1} \,. \tag{16}$$

   Dal momento dell'urto, per trovare lo spazio di frenata Δx si può utilizzare il teorema delle forze vive

   $$L_{if} = T_f - T_i = 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 \,, \tag{17}$$

   dove abbiamo anche

   $$L_{if} = -\mu (m_1 + m_2) g \Delta x \,. \tag{18}$$

   Quindi

   $$\Delta x = \frac{v^2}{2\mu g} = 0.28 \text{ m} \,. \tag{19}$$

2. Se l'urto è elastico, la velocità di m_1 subito dopo l'urto è un'altra incognita del problema. Si conserva l'energia cinetica, quindi abbiamo anche un'equazione in più.

   $$m_1 v_O = m_1 v_1 + m_2 v_2 \,, \tag{20}$$
   $$m_1 v_O^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \,. \tag{21}$$

Possiamo riscrivere il sistema come segue

$$
\begin{aligned}
m_1(v_O - v_1) &= m_2 v_2\,, && (22)\\
m_1(v_O^2 - v_1^2) &= m_1(v_O + v_1)(v_O - v_1) = m_2 v_2^2\,. && (23)
\end{aligned}
$$

Risolvendo si ha

$$
\begin{aligned}
v_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_O = \frac{2}{3} v_O = 2.95 \text{ m} \quad \text{s}^{-1}\,, && (24)\\
v_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_O = -\frac{1}{3} v_O = -1.48 \text{ m} \quad \text{s}^{-1}\,, && (25)
\end{aligned}
$$

cioè il punto materiale di massa m_1 rimbalza su m_2 e torna indietro risalendo parzialmente la guida fino ad un'altezza h tale che

$$h = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{1}{9} R = 0.112 \text{ m}\,. \tag{26}$$

Poi riscende sempre lungo la guida e in O ha di nuovo velocità

$$v_1 = \frac{1}{3} v_O = 1.48 \text{ m} \quad \text{s}^{-1}\,, \tag{27}$$

diretta nel verso positivo delle x. Entra nel tratto scabro e si arresta dopo

$$\Delta x_1 = \frac{v_1^2}{2\mu g} = 0.28 \text{ m}\,. \tag{28}$$

il punto di massa m_2 acquista, dopo l'urto, una velocità v_2 nel verso delle x positive. Entra nel tratto scabro e poi si arresta dopo

$$\Delta x_2 = \frac{v_2^2}{2\mu g} = 1.11 \text{ m}\,. \tag{29}$$

Soluzione esercizio 3

1. Indichiamo con a l'accelerazione comune del blocchetto m_2 e m_1. Per il moto del blocchetto m_2 prendiamo un sistema di riferimento lungo il piano inclinato. Allora

$$m_2 a = m_2 g \sin\theta_2 - T_2\,, \tag{30}$$

dove T_2 è la tensione della corda nel tratto da m_2 alla carrucola. La stessa cosa per m_1:

$$m_1 a = -m_1 g \sin\theta_1 + T_1\,, \tag{31}$$

dove T_1 è la tensione della corda nel tratto da m_1 alla carrucola. Il movimento della carrucola è descritto dalla seconda cardinale:

$$I\ddot{\theta} = (T_2 - T_1) R\,, \tag{32}$$

dove

$$I = \frac{MR^2}{2}\,, \tag{33}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{a}{R}\,. \tag{34}$$

Risolvendo il sistema si ottiene

$$a = g\,\frac{m_2 \sin\theta_2 - m_1 \sin\theta_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} = g\,\frac{m_2 \sin\theta_2 - m_1 \sin\theta_1}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} = 1.46 \text{ m} \quad \text{s}^{-2}\,. \tag{35}$$

2. Per avere velocità costante, il moto deve avere accelerazione nulla. Quindi

$$a = 0 \quad \Longrightarrow \quad m_2 g \sin\theta_2 = m_1 g \sin\theta_1\,, \tag{36}$$

ovvero

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\,. \tag{37}$$

3. Se τ è il momento frenante agente sulla carrucola, allora la seconda cardinale sarà

$$I\ddot{\theta} = (T_2 - T_1)R - \tau\,, \tag{38}$$

e quindi

$$a = \frac{g(m_2 \sin\theta_2 - m_1 \sin\theta_1) - \frac{\tau}{R}}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} = 0.88 \text{ m} \quad \text{s}^{-2}\,. \tag{39}$$

cioè l'accelerazione diminuisce rispetto al caso senza attrito.

Soluzione esercizio 4

1. Siccome la trasformazione CA è un'isoterma, di cui conosciamo il calore scambiato, possiamo trovare T_C.

$$Q_{CA} = L_{CA} = nRT_C \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) = -3600 \text{ J}\,, \tag{40}$$

da cui

$$T_C = T_A = \frac{Q_{CA}}{nR \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right)} = 89.7 \text{ K}\,. \tag{41}$$

Per trovare T_B, invece, sfruttiamo la trasformazione BC (adiabatica) per la quale abbiamo

$$\Delta U_{BC} = n\tilde{c}_V (T_C - T_B) = -3000 \text{ J}\,, \tag{42}$$

da cui

$$T_B = T_C - \frac{\Delta U_{BC}}{n\tilde{c}_V} = 137.8 \text{ K}\,. \tag{43}$$

2. Per trovare il rendimento del ciclo, abbiamo

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{ass}}\,, \tag{44}$$

dove

$$\begin{aligned} Q_{ced} &= Q_{CA} = -3600 \text{ J}\,, &(45)\\ Q_{ass} &= Q_{AB} = n\tilde{c}_p(T_B - T_A) = 4200.0 \text{ J}\,. &(46)\end{aligned}$$

Allora

$$\eta = 0.143\,. \tag{47}$$

Alternativamente si può utilizzare la

$$\eta = \frac{L_{tot}}{Q_{ass}}\,, \tag{48}$$

dove $L_{tot} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA}$ con

$$\begin{aligned} L_{AB} &= p_A \int dV = p_A(V_B - V_A) = nR(T_B - T_A) = 1200 \text{ J}\,, &(49)\\ L_{BC} &= -\Delta U_{BC} = -n\tilde{c}_V(T_C - T_B) = 3000 \text{ J}\,, &(50)\\ L_{CA} &= Q_{CA} = nRT_C \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) = -3600 \text{ J}\,. &(51)\end{aligned}$$

3. Per trovare la differenza di entropia ΔS_{BC} non possiamo integrare l'integrale di Clausius lungo la trasformazione irreversibile. Dobbiamo trovare una trasformazione (o serie di trasformazioni) reversibile che colleghi B a C e sulle quali si possa calcolare l'entropia. Siccome

$$\Delta S = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = 0\,, \tag{52}$$

si ha

$$\Delta S_{BC} = -\Delta S_{AB} - \Delta S_{CA}\,. \tag{53}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \Delta S_{AB} &= \int_A^B \frac{đQ}{T} = n\tilde{c}_p \int_A^B \frac{dT}{T} = n\tilde{c}_p \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)\,, &(54)\\ \Delta S_{CA} &= \int_C^A \frac{đQ}{T} = nR \int_C^A \frac{dV}{V} = nR \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right)\,. &(55)\end{aligned}$$

Quindi

$$\Delta S_{BC} = n\tilde{c}_p \ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right) + nR\ln\left(\frac{V_C}{V_A}\right) = 2.66 \text{ J/K}\,. \tag{56}$$

Allo stesso modo, possiamo direttamente utilizzare la forma funzionale dell'entropia del gas perfetto e calcolare direttamente $S(C) - S(B)$:

$$\Delta S_{BC} = n\tilde{c}_V \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) + nR\ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right)\,, \tag{57}$$

$$= n\tilde{c}_V \ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right) + nR\left[\ln\left(\frac{V_C}{V_A}\right) + \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)\right], \tag{58}$$

$$= n\tilde{c}_V \ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right) + nR\left[\ln\left(\frac{V_C}{V_A}\right) + \ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right)\right], \tag{59}$$

$$= n\tilde{c}_p \ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right) + nR\ln\left(\frac{V_C}{V_A}\right). \tag{60}$$

Esame 15 Febbraio 2018

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

Dipartimento di Matematica

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

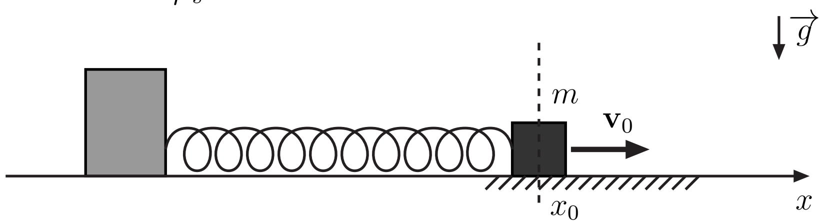
Anno Accademico 2017-2018

Regole per lo scritto:

- RECUPERO 1° ESONERO: risolvere gli esercizi 1 e 2 in 2h.
- RECUPERO 2° ESONERO: risolvere gli esercizi 3 e 4 in 2h.
- COMPITO: risolvere gli esercizi 1, 3 e 4 in 3h.

Esercizio 1 $*$

Ad una molla di costante elastica $k = 15$ N/m è attaccata una massa $m = 2$ kg che si muove su un piano orizzontale scabro. Tra massa e piano il coefficiente di attrito dinamico è $\mu_d = 0.4$ e quello statico è $\mu_s = 0.5$.



Se inizialmente la massa sta passando per la posizione di equilibrio della molla x_0 con velocità $v_0 = 1$ m/s positiva

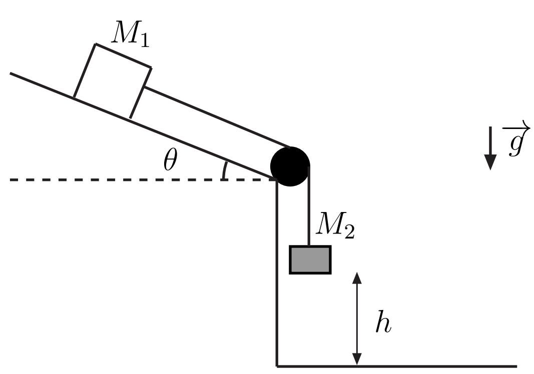
1. si calcoli la massima elongazione Δx della molla quando la massa si arresta la prima volta;

2. si determini se dopo l'arresto la massa rimane ferma o se ritorna verso x_0;

3. se il piano viene inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo $\theta = \pi/6$ in discesa nella direzione positiva delle x, si determini il nuovo Δx.

Esercizio 2

Due corpi di massa $M_1 = 600$ g e $M_2 = 100$ g sono connessi da una fune ideale (di lunghezza opportuna) che può scorrere senza attrito su un supporto fisso, come in figura. Il piano dove è poggiato M_1 è inclinato di $\theta = 15°$ rispetto all'orizzontale ed M_2 è sospeso ad una quota $h = 60$ cm dal suolo.



Si calcoli

1. il minimo valore del coefficiente di attrito statico μ_s sul piano inclinato affinché il sistema rimanga in quiete;

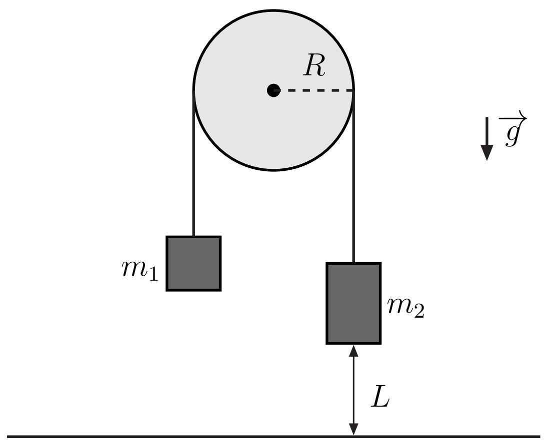
2. se si raddoppia la massa M_2 il sistema si mette in moto. Assumendo un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.42$, si calcoli la velocita v_1 di M_1 nell'istante in cui M_2 raggiunge il suolo.

3. Sempre nel caso del punto precedente, si calcoli il tempo impiegato da M_2 per raggiungere il suolo.

****

Esercizio 3 $*$

Due masse $m_1 = 200$ g e $m_2 = 400$ g sono fissate agli estremi di una fune ideale messa a cavallo di una carrucola (assimilabile ad un disco libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse) di raggio $R = 10$ cm.



1. Si nota che la massa m_2, inizialmente ferma, scende con accelerazione $a = 1$ m/s^2. Supponendo che la fune non scivoli sulla carrucola e trascurando tutti gli attriti, si calcoli il momento d'inerzia I_C della carrucola (specificare la massa della carrucola supponendo il disco omogeneo).

2. Se la massa m_2 dista inizialmente da terra $L = 50$cm, con che velocità tocca terra se la carrucola sperimenta un momento frenante costante di modulo pari a $\tau = 0.1$ Nm?

Esercizio 4 $*$

Una mole di gas perfetto monoatomico è in equilibrio nello stato A, con $p_A = 1$ Atm e $T_A = 300$ K. Tramite un'espansione isobara quasi statica il gas si porta nello stato B, con $V_B = 2\,V_A$. Successivamente, il gas viene messo in contatto termico con una sorgente a temperatura $T_C < T_B$ e, tramite un'isocora irreversibile, si porta all'equilibrio nello stato C. Da qui, con una trasformazione adiabatica quasi statica, torna nello stato A. Determinare:

1. la pressione p_C e la temperatura T_C del gas nello stato C;

2. il rendimento del ciclo;

3. la variazione di entropia del gas e dell'ambiente nella trasformazione BC.

Soluzione esercizio 1

1. Utilizzando il teorema delle forze vive otteniamo

$$L_{if} = -\frac{1}{2}k\Delta x^2 - \mu_d mg\,\Delta x = -\frac{1}{2}mv_0^2\,. \tag{1}$$

ovvero

$$\Delta x^2 + 2\frac{\mu_d mg}{k}\Delta x - \frac{m}{k}v_0^2 = 0\,, \tag{2}$$

da cui

$$\Delta x_{12} = -\frac{\mu_d mg}{k} \pm \sqrt{\frac{\mu_d^2 m^2 g^2}{k^2} + \frac{m}{k}v_0^2}\,. \tag{3}$$

La soluzione negativa è da scartare, quindi

$$\Delta x = -\frac{\mu_d mg}{k} + \sqrt{\frac{\mu_d^2 m^2 g^2}{k^2} + \frac{m}{k}v_0^2} = 0.115 \text{ m}\,. \tag{4}$$

2. Nell'attimo in cui si ferma e si appresta a ripartire, la massa m è soggetta alla forza di richiamo elastico, pari in modulo a

$$F = k\Delta x = 1.72 \text{ N}\,, \tag{5}$$

e alla forza di attrito statico

$$f_t \le \mu_s mg = 9.81 \text{ N}\,. \tag{6}$$

Quindi la forza d'attrito può uguagliare la forza di richiamo elastico e la massa rimane ferma.

3. Nel caso il piano sia inclinato di θ, il teorema delle forze vive dà

$$L_{if} = -\frac{1}{2}k\Delta x^2 - \mu_d mg\cos\theta\,\Delta x + mg\Delta x\,\sin\theta = -\frac{1}{2}mv_0^2\,. \tag{7}$$

ovvero

$$\Delta x^2 + 2\frac{mg}{k}(\mu_d\cos\theta - \sin\theta)\Delta x - \frac{m}{k}v_0^2 = 0\,, \tag{8}$$

da cui

$$\Delta x_{12} = -\frac{mg}{k}(\mu_d\cos\theta - \sin\theta) \pm \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2}(\mu_d\cos\theta - \sin\theta)^2 + \frac{m}{k}v_0^2}\,. \tag{9}$$

La soluzione negativa è da scartare, quindi

$$\Delta x = -\frac{mg}{k}(\mu_d\cos\theta - \sin\theta) + \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2}(\mu_d\cos\theta - \sin\theta)^2 + \frac{m}{k}v_0^2} = 0.618 \text{ m}\,. \tag{10}$$

Soluzione esercizio 2

1. Indicando con T il modulo della tensione della fune, scriviamo il secondo principio per M_1 e M_2 separatamente. Per M_1, preso un sistema di riferimento con le x lungo il piano inclinato e indicata con F_t la forza d'attrito, si ha:

$$\begin{aligned} T + M_1 g \sin\theta - F_t &= 0\,, && (11) \\ N &= M_1 g \cos\theta\,, && (12) \end{aligned}$$

   e inoltre sappiamo che

$$F_t \le \mu_s M_1 g \cos\theta\,. \tag{13}$$

   Per la massa M_2 abbiamo

$$T = M_2 g\,. \tag{14}$$

   Quindi

$$M_2 g + M_1 g \sin\theta = F_t \le \mu_s M_1 g \cos\theta\,, \tag{15}$$

   da cui si ricava

$$\mu_s \ge \frac{M_2 + M_1 \sin\theta}{M_1 \cos\theta} = 0.44\,. \tag{16}$$

2. Utilizziamo il teorema delle forze vive (i rappresenta la configurazione iniziale e f quella finale). Avremo:

$$L_{if} = V_i - V_f + \int_i^f \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} = T_f - T_i\,, \tag{17}$$

   dove

$$\begin{aligned} V_i - V_f &= M_1 g h \sin\theta + (2M_2) g h\,, && (18) \\ T_i &= 0\,, && (19) \\ T_f &= \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2}(2M_2) v_1^2\,, && (20) \\ \int_i^f \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} &= -\mu_d M_1 g \cos\theta h\,. && (21) \end{aligned}$$

   Quindi

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh[M_1(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) + 2M_2]}{(M_1 + 2M_2)}} = 1.28 \text{ m/s}\,. \tag{22}$$

3. L'accelerazione a con cui M_1 o $2M_2$ si muovono è data dalla

$$(M_1 + 2M_2)a = 2M_2 g + M_1 g \sin\theta - \mu_d M_1 g \cos\theta\,, \tag{23}$$

   cioè:

$$a = \frac{M_1(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) + 2M_2}{M_1 + 2M_2} g = 1.37 \text{ m} \quad \text{s}^{-2}\,. \tag{24}$$

   Quindi il moto è uniformemente accelerato e per coprire il tratto h, il tempo necessario è

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 0.94 \text{ s}\,. \tag{25}$$

Soluzione esercizio 3

1. Dato che il filo non striscia sulla carrucola, si può scrivere l'eq del moto per il sistema utilizzando la relazione fra accelerazione di m_1 e m_2 e accelerazione angolare della carrucola
$$a = R\ddot{\theta}\,. \tag{26}$$
Si ha
$$(m_1 + m_2)a + I_C \frac{a}{R^2} = (m_2 - m_1)g\,, \tag{27}$$
da cui
$$I_C = (m_2 - m_1)\frac{gR^2}{a} - (m_1 + m_2)R^2 = 1.36 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \quad \text{m}^2\,. \tag{28}$$
Inoltre
$$M = \frac{2I_c}{R^2} = 2.72 \text{ kg}\,. \tag{29}$$

2. Utilizziamo il teorema delle forze vive:
$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}I_C\frac{v^2}{R^2} = (m_2 - m_1)gL - \tau\theta\,, \tag{30}$$
dove $\theta = L/R$, da cui
$$v = \sqrt{\frac{2\left((m_2 - m_1)gL - \tau\frac{L}{R}\right)}{m_1 + m_2 + \frac{I_C}{R^2}}} = 0.5 \text{ m/s}\,. \tag{31}$$

Soluzione esercizio 4

1. Troviamo il volume V_A. Dall'equazione di stato del gas perfetto abbiamo:
$$V_A = \frac{nRT_A}{p_A} = 24.62 \text{ l}\,, \tag{32}$$
quindi
$$V_B = 2V_A = 49.24 \text{ l} \tag{33}$$
e
$$T_B = \frac{p_A V_B}{R} = 2\,\frac{p_A V_A}{R} = 2\,T_A = 600 \text{ K}\,. \tag{34}$$
Essendo A e C su un'adiabatica quasi statica, si ha
$$p_C V_C^{\gamma} = p_A V_A^{\gamma}\,, \tag{35}$$
con $\gamma = 5/3$, ovvero
$$p_C = p_A\left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma} = p_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma} = p_A\left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma} = 0.31 \text{ Atm}\,. \tag{36}$$
Infine
$$T_C = \frac{p_C V_C}{R} = \frac{2p_C V_A}{R} = 2T_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma} = 189.0 \text{ K}\,. \tag{37}$$

2. Abbiamo

$$\eta = \frac{L}{Q_{ass}} = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{ass}}\,, \tag{38}$$

dove

$$\begin{aligned} Q_{ass} &= Q_{AB}\,, &(39)\\ Q_{ced} &= Q_{BC}\,. &(40) \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= \int_A^B (dU + pdV) = \tilde{c}_V(T_B - T_A) + p_A(V_B - V_A) = \tilde{c}_p(T_B - T_A)\,, &(41)\\ Q_{BC} &= \tilde{c}_V(T_C - T_B)\,. &(42) \end{aligned}$$

Quindi

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{T_B - T_C}{T_B - T_A} = 0.18\,. \tag{43}$$

3. Non possiamo integrare l'integrale di Clausius lungo la trasformazione irreversibile, ma possiamo considerare una isocora reversibile. Quindi, la variazione di entropia del gas è pari a

$$\Delta S_{BC}^{gas} = S(C) - S(B) = \tilde{c}_V \ln\frac{T_C}{T_B} = -14.4 \text{ J/K}\,. \tag{44}$$

La sorgente acquista il calore ceduto dal gas. La sua variazione di entropia, quindi, è data da

$$\Delta S_{BC}^{sor} = -\int_B^C \frac{đQ}{T} = -\frac{1}{T_C}\int_B^C đQ = -\frac{Q_{BC}}{T_C} = \tilde{c}_V\frac{T_B - T_C}{T_C} = 27.1 \text{ J/K}\,. \tag{45}$$

Esame 3 Luglio 2018

Roberto Bonciani e Paolo Dore

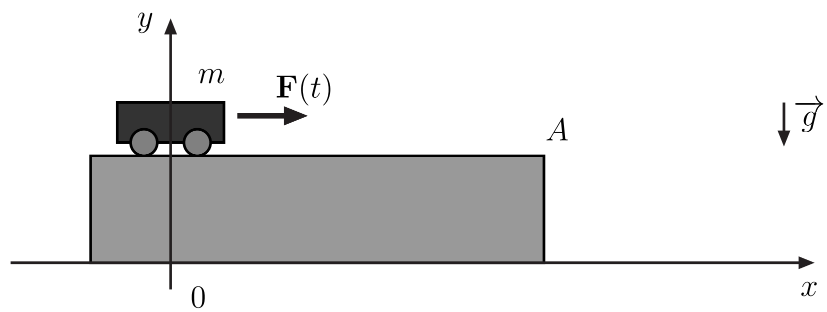
Corso di Fisica Generale 1
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2017-2018

Esercizio 1

Un carrello di massa $m = 500$ g si muove su un binario posto su un piano orizzontale ad altezza $h = 50$ cm dal suolo, senza attrito, mosso da una forza dipendente dal tempo

$$F(t) = F_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) , \qquad F(t) = 0 \quad \text{per} \quad t > T \, ,$$

con $F_0 = 0.1$ N e $T = 2$ s.



All'istante $t = 0$ il carrello è fermo nell'origine dell'asse x e all'istante $t = 2T$ il carrello esce dal binario in A e cade sul suolo per effetto della forza peso. Determinare:

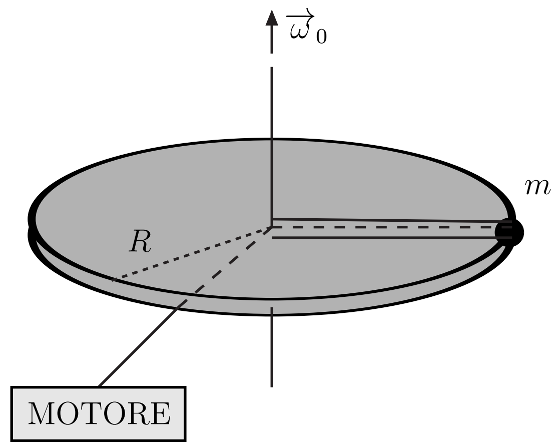
1. la velocità con cui il carrello esce dal binario;
2. la distanza X persorsa sul binario;
3. l'energia cinetica con cui il carrello urta il suolo.

Esercizio 2

Un cannone spara proiettili con una velocità iniziale v_0 di modulo pari a $|v_0| = 50$ m/s. Se il cannone spara dal bordo di una postazione ad un'altezza di $h = 50$ m dal suolo e il proiettile alla massima quota raggiunta possiede una velocità v_1 di modulo pari a $|v_1| = 30$ m/s, calcolare la distanza R tra il cannone ed il punto di impatto al suolo del proiettile.

Esercizio 3

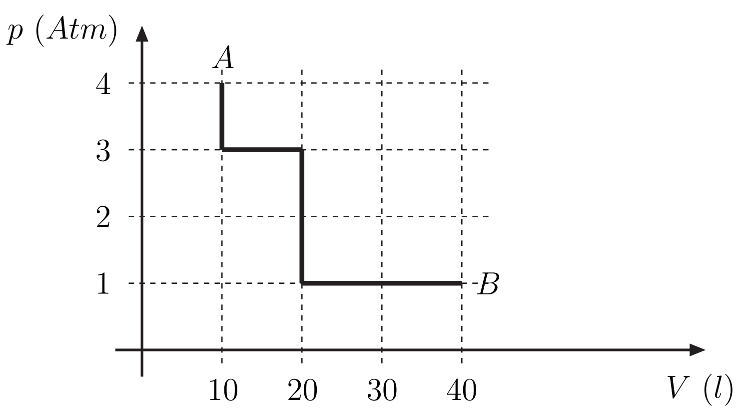
Una piattaforma cilindrica di massa $M = 25$ kg e raggio $R = 2$ m è libera di ruotare attorno ad un'asse verticale passante per il suo centro. Sul bordo della piattaforma, in una scanalatura radiale, è posta una massa puntiforme $m = 2$ kg.



La massa m può scorrere senza attrito nella scanalatura ed è connessa attraverso una fune ideale, che passa per un foro centrale, ad un motore esterno (vedi figura). Tutto il sistema (piattaforma più massa m) ruota inizialmente con velocità angolare $\omega_0 = 1$ rad/s. Trascurando tutti gli attriti, determinare il lavoro fatto dal motore per trascinare la massa m dal bordo al centro della piattaforma.

Esercizio 4

Una mole di gas perfetto monoatomico compie la trasformazione reversibile in Figura.



Calcolare:

1. il lavoro totale L_{AB} fatto nella trasformazione $A \to B$;
2. la differenza di energia interna ΔU_{AB};
3. la differenza di Entropia ΔS_{AB};

Soluzione esercizio 1

1. Per trovare la velocità basta considerare il fatto che il carrello parte da fermo ed accelera con accelerazione dipendente dal tempo uscendo dal carrello all'istante $t = 2T$. La forza agisce sul carrello fino all'istante T e poi, non essendoci attrito, il carrello continua a muoversi con la stessa velocità finché non esce dalla guida. Allora

$$\begin{aligned} v(T) &= \int_0^T a(t)\, dt = \int_0^T \frac{1}{m} F(t)\, dt = \frac{1}{m}\int_0^T F_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) dt = \frac{F_0}{m}\left(T - \frac{T^2}{2T}\right) \\ &= \frac{F_0 T}{2m} = 0.2 \text{ m} \quad \text{s}^{-1} \end{aligned} \tag{1}$$

e

$$v(2T) = v(T) = 0.2 \text{ m} \quad \text{s}^{-1}. \tag{2}$$

2. Per trovare la distanza percorsa sulla guida dobbiamo integrare la velocità. Si ha

$$\begin{aligned} X &= \int_0^{2T} v(t)\, dt = \int_0^T \frac{F_0}{m}\left(t - \frac{t^2}{2T}\right) + \int_T^{2T} \frac{F_0 T}{2m}\, dt \\ &= \frac{F_0}{m}\left(\frac{T^2}{2} - \frac{T^3}{6T}\right) + \frac{F_0 T}{2m} T = \frac{F_0 T^2}{3m} + \frac{F_0 T^2}{2m} = \frac{5 F_0 T^2}{6m} = 0.67 \text{ m}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

3. L'energia si conserva. All'istante $2T$ l'energia meccanica del carrello è

$$E(2T) = \frac{1}{2} m v^2 + V = \frac{m}{2}\frac{F_0^2 T^2}{4m^2} + mgh = \frac{F_0^2 T^2}{8m} + mgh = 2.46 \text{ J}\,, \tag{4}$$

avendo posto $V(y=0) = 0$. Quando il carrello tocca il suolo, quindi, la sua energia cinetica sarà

$$T = E(2T) = 2.46 \text{ J}\,. \tag{5}$$

Soluzione esercizio 2

La velocià iniziale del proiettile è $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos\theta, v_0 \sin\theta)$. Le equazioni del moto quindi sono date da

$$\begin{cases} x(t) &= v_0 \cos\theta\, t\,, \\ y(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta\, t + h\,. \end{cases} \tag{6}$$

Il moto lungo le x è un moto uniforme, quindi la velocità al picco è pari alla componente x della velocità $\mathbf{v}_0$:

$$v_1 = v_0 \cos\theta\,, \tag{7}$$

da cui

$$\cos\theta = \frac{v_1}{v_0} = \frac{3}{5} \tag{8}$$

e quindi

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}\,. \tag{9}$$

L'istante t^* in cui il proiettile tocca terra è dato dall'equazione $y(t^*) = 0$, ovvero

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_0 \sin\theta\, t - h = 0\,, \tag{10}$$

che ha come soluzione positiva (la negativa non ha senso fisico e quindi si scarta)

$$t^* = \frac{v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh}}{g} = 9.26 \text{ s}\,. \tag{11}$$

Quindi, la distanza percorsa dal proiettile è

$$R = x(t^*) = v_0 \cos\theta\, t^* = 277.94 \text{ m}\,. \tag{12}$$

Soluzione esercizio 3

Poiché nessun momento esterno viene applicato al sistema, il momento angolare (che e' diretto lungo l'asse di rotazione) si conserva:

$$L_{in} = L_{fin}\,. \tag{13}$$

Si ha

$$L_{in} = I_{tot}\omega_0\,, \tag{14}$$

dove

$$I_{tot} = I_{disco} + I_m = M\frac{R^2}{2} + mR^2\,. \tag{15}$$

Inoltre

$$L_{fin} = I_{disco}\omega_{fin}\,. \tag{16}$$

e quindi

$$\omega_{fin} = \left(1 + \frac{2mR^2}{MR^2}\right)\omega_0 = \left(1 + \frac{2m}{M}\right)\omega_0 = 1.16 \text{ s}^{-1}\,. \tag{17}$$

Il lavoro fatto dal motore si trova utilizzando il teorema delle forze vive:

$$L_{motore} = T_{fin} - T_{in} = \frac{1}{2}I_{tot}\omega_0^2 - \frac{1}{2}I_{disco}\omega_{fin}^2 = 4.5 \text{ J}\,. \tag{18}$$

Soluzione esercizio 4

1. Il lavoro si trova subito calcolando l'area sotto la curva nel piano di Clapeyron

$$L = 50 \text{ l} \quad \text{Atm}\,. \tag{19}$$

2. Dalla figura si vede che

$$p_A V_A = p_B V_B\,, \tag{20}$$

ovvero che $T_A = T_B$. Quindi, trattandosi di un gas perfetto

$$\Delta U_{AB} = 0\,. \tag{21}$$

3. Siccome $T_A = T_B$, possiamo calcolare ΔS_{AB} utilizzando una isoterma reversibile. Abbiamo

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_A} \int_A^B p\, dV = nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = 2R \ln 2 = 11.5 \text{ J/K}\,. \tag{22}$$

Esame 24 Luglio 2018

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

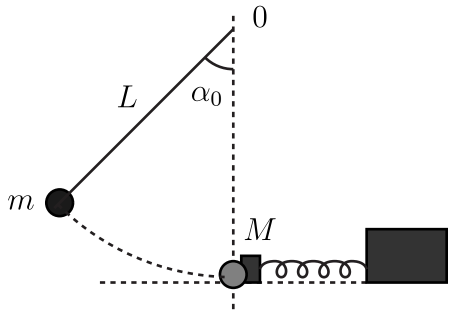
Dipartimento di Matematica

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Anno Accademico 2017-2018

Esercizio 1

Una pallina di massa $m = 0.5$ kg è agganciata all'estremità di un'asta di lunghezza $L = 1$ m e massa trascurabile, che ha l'altro estremo vincolato a ruotare senza attrito attorno ad un perno O. Inizialmente la pallina viene lasciata con velocità nulla quando l'asta forma un angolo di $\alpha_0 = 45°$ con la verticale.

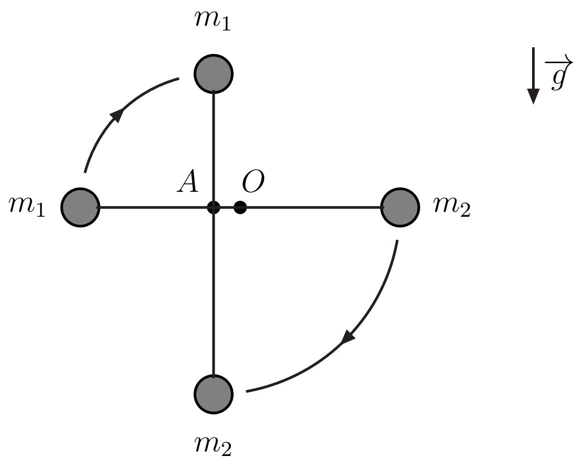


Quando l'asta passa per la verticale, la massa m urta in modo perfettamente elastico una massa $M = 1$ kg, collegata all'estremo libero di una molla di costante elastica $k = 10$ N/m, libera di scorrere senza attrito su un piano orizzontale. La molla è inizialmente in condizione di riposo, con l'altro estremo fisso.

- Determinare la velocità della massa m subito dopo l'urto in modulo, direzione e verso.
- Determinare la massima compressione della molla c_M in seguito all'utro.
- Descrivere il moto di m dopo l'urto, ed in particolare determinare la sua posizione quando la sua velocità si annulla per la prima volta.

Esercizio 2

Un'asta rigida, di massa trascurabile e lunghezza $L = 1.5$ m, è libera di ruotare in un piano verticale intorno ad un asse orizzontale passante per un suo punto A distante $d = 0.2$ m dal centro O.



Agli estremi dell'asta sono fissate due masse $m_1 = 300$ g e $m_2 = 600$ g. Il sistema, inizialmente posto in posizione orizzontale, è lasciato libero con velocità iniziale nulla. Calcolare:

- la velocità angolare della sbarra quando passa per la posizione verticale;
- La distanza dal centro O a cui deve essere sospesa l'asta se il periodo delle piccole oscillazioni del sistema è $\pi/2$ s.

Esercizio 3

In un ambiente in cui la pressione è trascurabile, si trova un cilindro chiuso da un pistone di massa $m = 5$ kg. Il cilindro contiene 15 g di azoto molecolare (N_2, massa molare 28 g/mol) all'equilibrio (approssimabile ad un gas perfetto), alla temperatura di $T_A = 20$ °C. Mettendo il cilindro a contatto con una sorgente a temperatura $T_B = 111$ °C il pistone si alza di $\Delta h = 20\ cm$.

1. Supponendo che gli stati iniziale e finale siano di equilibrio, calcolare il calore fornito al gas nella trasformazione $A \to B$.
2. Supponiamo adesso che il gas venga mantenuto al volume raggiunto V_B, costante, e che sia fatto raffreddare in maniera quasi statica fino allo stato C, con $V_C = V_B$ e $T_C = T_A$. Calcolare la variazione di entropia nella trasformazione $B \to C$.

Soluzione esercizio 1

- Utilizziamo la conservazione dell'energia per la massa m. Se v_f è la velocità della massa m quando urta la massa M, si ha:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgL(1-\cos\alpha_0)\,, \tag{1}$$

ovvero

$$v_f = \sqrt{2gL(1-\cos\alpha_0)} = 2.397 \text{ m/s}^2\,. \tag{2}$$

Durante l'urto, si considera il fatto che la forza elastica non è impulsiva. Si conserva allora l'impulso in direzione x, oltre che l'energia cinetica. Se v_m e v_M sono le velocità dopo l'urto della massa m e della M rispettivamente, si ha:

$$\begin{aligned} mv_f &= mv_m + Mv_M\,, && (3)\\ \frac{1}{2}mv_f^2 &= \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2\,. && (4) \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema, e scartando la soluzione banale, si ottiene

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{m-M}{m+M}v_f = -0.799 \text{ m/s}\,, && (5)\\ v_M &= 2\frac{m}{m+M}v_f = 1.598 \text{ m/s}\,. && (6) \end{aligned}$$

Se ne deduce che la velocità di m dopo l'urto ha verso opposto a v_f.

- Sempre utilizzando la conservazione dell'energia si trova che la massima compressione della molla, Δx, si ottiene da

$$\frac{1}{2}Mv_M^2 = \frac{1}{2}k\Delta x^2\,, \tag{7}$$

ovvero

$$\Delta x = \sqrt{\frac{M}{k}}v_M = 2\sqrt{\frac{M}{k}}\frac{m}{m+M}v_f = 50.5 \text{ cm}\,. \tag{8}$$

- La massa m quindi urta contro la massa M e inverte la sua velocità che dopo l'urto ha modulo $|v_m|$. Il moto di m sarà quindi tale da far risalire la massa collegata alla sbarra fino ad un'altezza

$$\Delta h = \frac{v_m^2}{2g} = 0.033 \text{ m}\,. \tag{9}$$

Soluzione esercizio 2

- Il momento d'inerzia del bilancere rispetto all'asse passante per A è dato da

$$I_A = m_1\left(\frac{L}{2}-d\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}+d\right)^2 = (m_1+m_2)\left(\frac{L^2}{4}+d^2\right) + (m_2-m_1)Ld$$

$$= \tag{10}$$

Per la conservazione dell'energia meccanica si ha

$$0 = \frac{1}{2} I_A \omega_f^2 + m_1 g \left(\frac{L}{2} - d \right) - m_2 g \left(\frac{L}{2} + d \right) , \tag{11}$$

da cui

$$\omega_f = \sqrt{\frac{2g}{I_A} \left((m_2 - m_1) \frac{L}{2} + (m_2 + m_1) d \right)} = 3.55 \text{ s}^{-1} . \tag{12}$$

- Il bilanciere è un pendolo composto. Se il centro di massa G dista l_G dall'asse di rotazione A, si ha che il periodo delle piccole oscillazioni è dato da

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{(m_1 + m_2) g l_G}} . \tag{13}$$

Quindi dovremo esprimere anche l_G in funzione di d e trovare d tale che $T = \pi/2$. Si ha

$$l_G = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \left(\frac{L}{2} - d \right) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{L}{2} + d \right) = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \frac{L}{2} + d \tag{14}$$

e dovrà essere

$$\frac{T^2 (m_1 + m_2) g}{4\pi^2} = \frac{I_A}{l_G} , \tag{15}$$

da cui

$$I_A - \frac{T^2 (m_1 + m_2) g}{4\pi^2} l_G = 0 , \tag{16}$$

che è un'equazione di secondo grado in d:

$$d^2 + \left\{ \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} L - \frac{T^2 g}{4\pi^2} \right\} d - \frac{T^2 g}{4\pi^2} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \frac{L}{2} + \frac{L^2}{4} = 0 . \tag{17}$$

Le due soluzioni sono:

$$\begin{aligned}
d_{1,2} &= \frac{1}{2} \frac{T^2 g}{4\pi^2} - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \frac{L}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} L - \frac{T^2 g}{4\pi^2} \right\}^2 + 2 \frac{T^2 g}{4\pi^2} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} L - L^2} , \\
&= \frac{1}{2} \frac{T^2 g}{4\pi^2} - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \frac{L}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} L \right\}^2 + \left\{ \frac{T^2 g}{4\pi^2} \right\}^2 - L^2} , \\
&= \frac{1}{2} \frac{T^2 g}{4\pi^2} - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \frac{L}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ \frac{T^2 g}{4\pi^2} \right\}^2 - 4 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} L^2} \qquad (18)
\end{aligned}$$

Imponendo $T = \pi/2$, si trova che il determinante sotto radice è negativo! Quindi non è possibile trovare un d tale che il periodo delle piccole oscillazioni sia $T = \pi/2$.

Soluzione esercizio 3

1. La trasformazione $A \to B$ è irreversibile. Però il lavoro fatto dal gas viene compiuto contro la forza di gravità che agisce sul pistone e che quindi è costante. Col teorema delle forze vive, poiché $T_B = T_A = 0$, si trova tale lavoro

$$L_{AB} = mgh = 9.81 \text{ J}\,. \tag{19}$$

Se l'azoto può essere approssimato ad un gas perfetto biatomico, si ha che

$$dU = n\, c_V\, dT\,, \tag{20}$$

dove $n = 0.536$ mol e quindi, nella trasformazione

$$\Delta U_{AB} = n\, c_V\, (T_B - T_A) = \frac{5}{2}\, n\, R(T_B - T_A) = 1013.8 \text{ J}\,. \tag{21}$$

Quindi, per il primo principio

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} + L_{AB} = 1023.61 \text{ J}\,. \tag{22}$$

2. La trasformazione $B \to C$ è una isocora quasi statica. Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} đL &= 0\,, & (23)\\ dQ &= dU = n\, c_V\, dT\,. & (24) \end{aligned}$$

La variazione di entropia è data da

$$S_{BC} = \int_B^C \frac{dQ}{T} = n\, c_V \int_{T_B}^{T_A} \frac{dT}{T} = n\, c_V\, \ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right) = -3.03\ J/K\,. \tag{25}$$

Esame 20 Settembre 2018

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

Dipartimento di Matematica

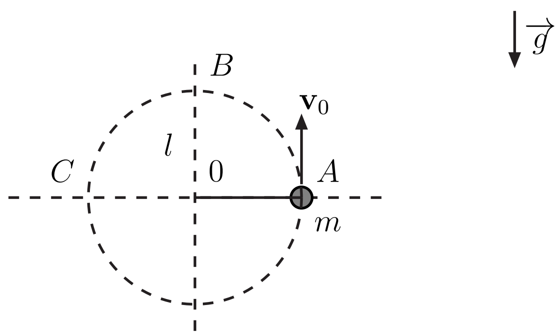
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Anno Accademico 2017-2018

Esercizio 1

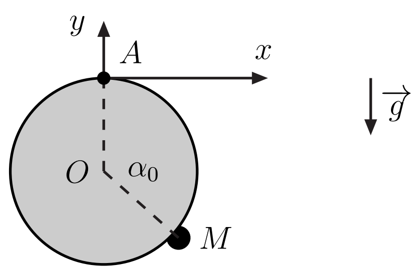
Una massa puntiforme $m = 500$ g viene lanciata dal punto A in direzione dell'asse y con velocità $\mathbf{v}_0$. Poiché la massa è attaccata ad una fune inestensibile e priva di massa lunga $l = 50$ cm il cui secondo estremo è vincolato ad un punto fisso O, la sua traiettoria sarà una circonferenza di centro O e raggio l, giacente nel piano verticale (vedi figura). Sapendo che nel punto B la tensione della fune è nulla,

1. determinare $\mathbf{v}_0$,
2. determinare la tensione della fune in C.



Esercizio 2

Un disco di massa $M = 1$ kg e raggio $R = 1$ m è incernierato nel punto A (vincolo liscio) e può muoversi, su un piano verticale, attorno a tale punto. Sul bordo del disco è fissato un punto materiale di massa M, posto in maniera tale che la congiungente OM formi un angolo $\alpha_0 = 2/3\pi$ con la congiungente OA. Sul sistema agisce la forza di gravità.



1. Trovare la configurazione di equilibrio. In particolare dare le coordinate del punto O quando il sistema è all'equilibrio.
2. Se il disco viene lasciato a $t = 0$ nella posizione in figura, inizia ad oscillare. Scrivere l'equazione del moto e, nell'approssimazione delle piccole oscillazioni, determinare il periodo di oscillazione.

Esercizio 3

Una mole di gas perfetto monoatomico, inizialmente all'equilibrio nello stato A, con $T_A = 300$ K e $p_A = 1$ Atm, esegue un ciclo termodinamico composto dalle seguenti trasformazioni quasi statiche: una isobara, che porta il gas nello stato B con $V_B = 3/2 V_A$, seguita da un'adiabatica che porta il gas allo stato C, a temperatura T_A, e infine da un'isoterma che chiude il ciclo riportando il gas nello stato iniziale A.

1. Tracciare il diagramma del ciclo sul piano di Clapeyron.
2. Calcolare la quantità di calore assorbita dal gas durante un ciclo.
3. Calcolare il rendimento del ciclo.

Soluzione esercizio 1

1. Mettiamo in relazione la tensione della fune in B con v_0.

   Il moto è caratterizzato dalla presenza di sole forze conservative (la tensione della fune è sempre perpendicolare al moto e quindi non fa lavoro). Possiamo allora utilizzare la conservazione dell'energia. Posto $V = 0$ sull'asse CA, si ha

   $$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgl\,, \tag{1}$$

   da cui

   $$v_B^2 = v_0^2 - 2gl\,. \tag{2}$$

   Scrivendo il secondo principio lungo la direzione radiale BO, ed indicando con T la tensione della fune, avremo

   $$T + mg = m\frac{v_B^2}{l} = m\frac{v_0^2}{l} - 2mg\,. \tag{3}$$

   Sicoome $T = 0$, si ha immediatamente

   $$v_0 = \sqrt{3gl} = 3.84\ \mathrm{ms}^{-1}\,. \tag{4}$$

2. La tensione nel punto C si ottiene ancora una volta dal secondo principio lungo il raggio CO. Questa volta la forza peso è perpendicolare e non gioca nessun ruolo.

   Si deve avere

   $$T = m\frac{v_C^2}{l}\,, \tag{5}$$

   dove v_C può essere trovata con la conservazione dell'energia

   $$v_C^2 = V_0^2\,. \tag{6}$$

   Infine

   $$T = m\frac{v_0^2}{l} = 14.7\ \mathrm{N}\,. \tag{7}$$

Soluzione esercizio 2

1. Siccome il sistema è soggetto soltanto alla forza di gravità, la posizione di equilibrio sarà raggiunta quando il centro di massa (c.m.) del sistema (chiamiamolo G) è allineato verticalmente col perno A. Quindi basta trovare la posizione di G.

   Il centro di massa del disco è posto in O. Quindi si tratta di trovare il c.m. di due punti materiali i ugual massa M posti a distanza R. Banalmente si trova che il c.m. è posizionato lungo la congiungente OM ad $R/2$ da entrambi.

   L'angolo GAO si trova utilizzando il teorema di Carnot. La distanza $GA = d$ è data da

   $$d^2 = R^2 + \frac{R^2}{4} - R^2\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{7}{4}R^2 \tag{8}$$

e quindi $d = 1.32$ m. Indicando l'angolo GAO con θ_0, si ha

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{2Rd}\left(R^2 + d^2 - \frac{R^2}{4}\right) = \frac{5}{2\sqrt{7}} = 0.95\,. \tag{9}$$

Le coordinate del punto O all'equilibrio, rispetto ad un SdR cartesiano centrato in A come in figura, sono

$$x_O = -R\sin\theta_0 = -R\sqrt{1-\cos^2\theta_0} = -R\sqrt{\frac{23}{48}} = -0.69\ \text{m}\,, \tag{10}$$

$$y_O = -R\cos\theta_0 = -R\frac{5}{2\sqrt{7}} = -0.95\ \text{m}\,. \tag{11}$$

2. Il sistema è un pendolo composto che ruota intorno al punto A. Ha quindi un grado di libertà e possiamo scrivere l'equazione del moto usando per esempio la seconda cardinale centrata in A. Se indichiamo con θ l'angolo formato dalla congiungente GA e la verticale, si ha

$$I_A\ddot{\theta} + 2Mg\,d\sin\theta = 0\,, \tag{12}$$

con le condizioni iniziali

$$\dot{\theta}(t=0) = 0\,, \quad \theta(t=0) = \theta_0\,. \tag{13}$$

Siccome $\theta_0 \sim 0.32$ si può approssimare il moto ad un moto armonico ponendo

$$\sin\theta \sim \theta\,, \tag{14}$$

ed ottenendo

$$\ddot{\theta} + \frac{2Mgd}{I_A}\theta = 0\,, \tag{15}$$

dove

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{2Mgd}}\,. \tag{16}$$

Per determinare il periodo quindi dobbiamo calcolare I_A. Si ha

$$I_A = I_{A,disco} + I_{A,massa}\,, \tag{17}$$

dove per il teorema di Huygens-Steiner si ha

$$I_{A,disco} = MR^2 + \frac{1}{2}MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 \tag{18}$$

e per il punto materiale

$$I_{A,massa} = 3MR^2\,. \tag{19}$$

In totale si ha

$$I_A = \frac{9}{2}MR^2\,. \tag{20}$$

Quindi, utilizzando le espressioni di I_A e d, si ottiene

$$T = \pi\sqrt{\frac{18R}{\sqrt{7}g}} = 2.62\ \text{s}\,. \tag{21}$$

Soluzione esercizio 3

Il gas assorbe calore durante l'espansione isobara e cede calore nella compressione isoterma.

La temperatura dello stato B si trova utilizzando l'equazione di stato del gas perfetto:

$$T_B = \frac{p_B V_B}{R} = \frac{3}{2}\frac{p_A V_A}{R} = \frac{3}{2} T_A = 450 \text{ K}\,. \tag{22}$$

Il volume nello stato A è dato da

$$V_A = \frac{R T_A}{p_A} = 0.0246 \text{ m}^3\,, \quad V_B = \frac{3}{2} V_A = 0.0369 \text{ m}^3\,. \tag{23}$$

Per il Primo Principio, lungo AB si ha:

$$đQ = dU + đL = \tilde{c}_V\, dT + p_A\, dV\,, \tag{24}$$

e quindi

$$Q_{ass} = \tilde{c}_V (T_B - T_A) + p_A (V_B - V_A) = 3117.75 \text{ J}\,. \tag{25}$$

Caratterizziamo il punto C. Abbiamo che $T_C = T_A$. Siccome poi B e C stanno su la stessa adiabatica reversibile, si avrà per le formule di Poisson

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}\,, \tag{26}$$

dove $\gamma = 5/3$. Quindi

$$V_C = \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^{\frac{3}{2}} V_B = 0.0678 \text{ m}^3 \tag{27}$$

Per calcolare il rendimento del ciclo ricordiamoci che

$$\eta = \frac{Q_{ass} + Q_{ced}}{Q_{ass}} = 1 + \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}}\,. \tag{28}$$

Il calore ceduto si trova calcolandolo lungo l'isoterma CA. Siccome $dT = 0$ e siccome il nostro sistema termodinamico è un gas perfetto, si ha $dU = 0$. Quindi

$$Q_{ced} = \int_C^A p\, dV = R T_A \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) = -2528.66 \text{ J}\,. \tag{29}$$

Pertanto

$$\eta = 1 + \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} = 19\%\,. \tag{30}$$