Esercitazione 11 Aprile 2024

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2023-2024

Esercitazione – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
11 Aprile 2024

Esercizio 1 (7pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(mx)}{x(x^2+a^2)^2} dx\,, \quad a \in \mathbb{R}^+\,, \quad m \in \mathbb{N}\,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (4pt)
Studiare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni:

$$f_1(z) = \frac{1}{\sin(z)}\,, \qquad f_2(z) = \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}\,. \tag{2}$$

1. Dire se le funzioni possono essere sviluppate in serie di Laurent in $z = 0$, e in caso affermativo se ne determini il residuo;
2. Calcolare, dove possibile, il residuo all'infinito delle due funzioni.

Esercizio 3 (4pt)
Calcolare il seguente integrale

$$\int_\gamma \frac{\ln(z)}{(z-2)^3(z^2+1)} dz\,, \qquad \gamma : t \to 2 + e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi\,, \tag{3}$$

utilizzando per le funzioni polidrome il ramo principale.

Esercizio 4 (7pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)\sqrt[3]{x}}\, dx\,. \tag{4}$$

Esercizio 5 (5pt)
Studiare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = \frac{1-\cos(z)}{e^{2iz}-1} \tag{5}$$

e calcolare il seguente integrale

$$I = \int_\gamma f(z)\, dz\,, \qquad \gamma : \theta \to 2\pi + e^{i\theta} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\,. \tag{6}$$

Esercizio 6 (3pt)
Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x,y) = e^{-2axy} \sin(x^2 - y^2) \tag{7}$$

risulti essere la parte reale di una funzione analitica $f(z)$ e determinare, di conseguenza, la funzione armonica coniugata (parte immaginaria della $f(z)$).

Soluzione Esercizio 1

L'integrale in questione è la parte immaginaria di

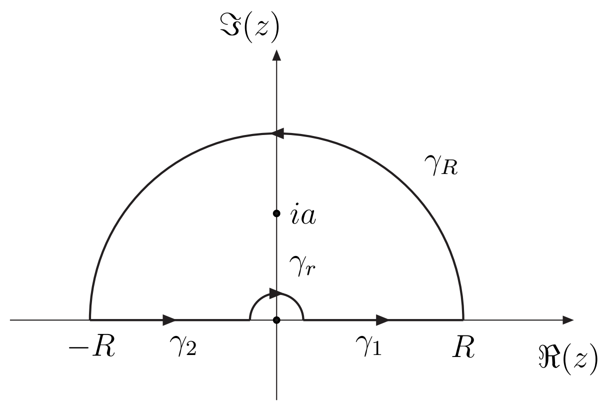
$$A = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{x(x^2+a^2)^2}\, dx = J + iI\,, \tag{8}$$

dove abbiamo dovuto introdurre il PV per regolarizzare la parte reale di A.

Consideriamo quindi la funzione

$$f(z) = \frac{e^{imz}}{z(z^2+a^2)^2} = \frac{e^{imz}}{z(z+ia)^2(z-ia)^2}\,. \tag{9}$$

La $f(z)$ ha un polo semplice in $z=0$ e due poli doppi in $z=\pm ia$. Possiamo calcolare l'integrale A, integrando la $f(z)$ sul seguente cammino chiuso



Allora, possiamo utilizzare il teorema dei residui

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \left\{\mathrm{Res}(f, ia)\right\}\,, \tag{10}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f, ia) &= \lim_{z\to ia} \frac{d}{dz}\left[\frac{e^{imz}}{z(z+ia)^2}\right]\,, && (11)\\ &= \ldots. \\ &= -\frac{e^{-ma}}{4a^4}(ma+2)\,. && (12) \end{aligned}$$

D'altra parte si ha

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_\Gamma f(z)\, dz = \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \left\{\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\, dz + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz + \int_{\gamma_r} f(z)\, dz\right\} \tag{13}$$

con

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\, dz = A\,. \tag{14}$$

Inoltre

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0\,, \tag{15}$$

per il lemma di Jordan e

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz &= -\pi i\,\mathrm{Res}(f,0)\,, &(16)\\ &= -\pi i\,\lim_{z\to 0}\frac{e^{imz}}{(z^2+a^2)^2} = -\frac{i\pi}{a^4}\,. &(17)\end{aligned}$$

In totale quindi abbiamo

$$J + iI - \frac{i\pi}{a^4} = -2\pi i\frac{e^{-ma}}{4a^4}(ma+2)\,, \tag{18}$$

cioè

$$I = \frac{\pi}{a^4}\left[1 - \frac{e^{-ma}}{2}(ma+2)\right]\,. \tag{19}$$

Soluzione Esercizio 2

Consideriamo la prima funzione

$$f_1(z) = \frac{1}{\sin(z)}\,. \tag{20}$$

La $f_1(z)$ è analitica in $\mathbb{C}$ tranne nei punti in cui si annulla il denominatore, ovvero in

$$z = k\pi\,. \tag{21}$$

In $z = k\pi$ la $f_2(z)$ ha delle singolarità polari (poli singoli). Questo succede anche in $z = 0$ che quindi è una singolarità isolata della f_2. Quindi è possibile sviluppare la funzione in serie di Laurent in $z = 0$:

$$f_1(z) = \frac{1}{z\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \ldots\right)} \simeq \frac{1}{z} + \frac{z}{3!} + \ldots \tag{22}$$

Il residuo in $z = 0$ è quindi pari a

$$\mathrm{Res}\,(f,0) = 1\,. \tag{23}$$

Nel punto all'infinito la funzione si comporta come

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \tag{24}$$

per $\zeta \to 0$. Quindi il punto all'infinito è un punto di accumulazione di singolarità per la f_1 e quindi NON è una singolarità isolata.

Consideriamo la seconda funzione

$$f_2(z) = \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)} \tag{25}$$

Il coseno si annulla in

$$\frac{1}{z} = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,, \tag{26}$$

ovvero per

$$z = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}\,. \tag{27}$$

Quindi $z = 0$ è un punto di accumulazione di singolarità. Non è una singolarità isolata e non si può definire il residuo.

Nel punto all'infinito la f_2 si comporta come

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{\cos(\zeta)} \tag{28}$$

in $\zeta \to 0$. Ovvero il punto all'infinito è un punto regolare per la $f_2(z)$. Si può calcolare il residuo nel punto all'infinito della f_2 come segue

$$\mathrm{Res}\,(f, \infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{\zeta^2}\frac{1}{\cos(\zeta)}, 0\right)\,. \tag{29}$$

Si ha

$$\frac{1}{\zeta^2}\frac{1}{\cos(\zeta)} = \frac{1}{\zeta^2}\frac{1}{\left(1 - \frac{\zeta^2}{2} + ...\right)} \simeq \frac{1}{\zeta^2}\left(1 + \frac{\zeta^2}{2} + ...\right) \tag{30}$$

e quindi il residuo è nullo.

Soluzione Esercizio 3

La funzione integranda

$$f(z) = \frac{\ln(z)}{(z-2)^3(z^2+1)} = \frac{\ln(z)}{(z-2)^3(z+i)(z-i)} \tag{31}$$

è polifroma. Poniamo il taglio del logaritmo sul semiasse reale negativo. Inoltre la $f(z)$ ha un polo triplo in $z = 2$ e due poli singoli in $z = \pm i$. Dovendo integrare sulla circonferenza di raggio unitario, centrata in $z = 2$, soltanto il polo doppio è interno alla circonferenza. Quindi in $\mathrm{Int}\{\gamma\}$ la funzione

$$g(z) = \frac{\ln(z)}{(z^2+1)} \tag{32}$$

è analitica. Possiamo allora utilizzare la formula integrale di Cauchy per fare l'integrale (che equivale ovviamente al teorema dei residui) e scrivere

$$\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-2)^3}\,dz = \pi i\ \frac{d^2}{dz^2}g(z)\bigg|_{z=2} = ... = \pi i\left(\frac{-105 + 88\ln 2}{500}\right)\,. \tag{33}$$

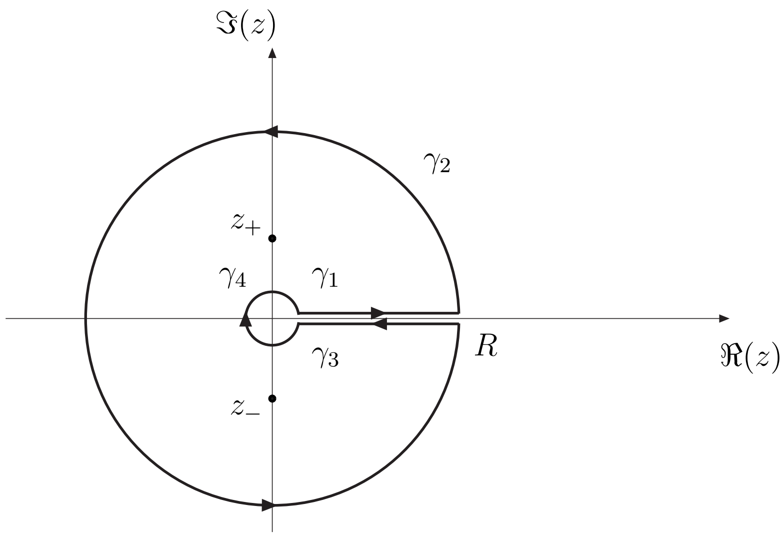
Soluzione Esercizio 4

Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)z^{\frac{1}{3}}} \,, \tag{34}$$

che è polidroma. Prendiamo il taglio lungo il semiasse reale positivo. Inoltre, la $f(z)$ ha due poli semplici in $z_\pm = \pm i$.

Scegliamo il seguente cammino d'integrazione[1]:



Facendo l'integrale su $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, si può applicare il teorema dei residui:

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left\{\mathrm{Res}(f, z_+) + \mathrm{Res}(f, z_-)\right\} = 2\pi i \left\{-\frac{i}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} + \frac{i}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}}\right\} \,, \tag{35}$$

$$= \pi\, e^{-i\frac{\pi}{3}} \left(e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) \,. \tag{36}$$

D'altra parte

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{\gamma_1} f(z) = \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)x^{\frac{1}{3}}} dx \,, \tag{37}$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z) = \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(R^2 e^{i2\theta}+1) R^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta}{3}}}\, iRe^{i\theta}\, d\theta = 0 \,, \tag{38}$$

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{\gamma_3} f(z) = \int_\infty^0 \left(e^{-i\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{(x^2+1)x^{\frac{1}{3}}}\right) dx = -e^{-\frac{2\pi}{3}i} \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)x^{\frac{1}{3}}} dx \,, \tag{39}$$

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_4} f(z) = -\lim_{r\to 0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(r^2 e^{i2\theta}+1) r^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta}{3}}}\, ire^{i\theta}\, d\theta = 0 \,. \tag{40}$$

[1] Si potrebbe scegliere anche una semicirconferenza sul semipiano superiore, $Re^{i\theta}$ con $0 < \theta < \pi$, chiusa da un segmento sull'asse reale con $-R < x < R$. Infatti nel denominatore di $f(z)$ c'è uno z^2 che rimane sé stesso anche se $z \to ze^{i\pi}$.

In totale si trova

$$I\left(1-e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)=\pi\, e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}-e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)\,, \tag{41}$$

ovvero

$$I=\pi\,\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{6}}-e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)}{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}=\pi\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\,. \tag{42}$$

Soluzione Esercizio 5

Le singolarità della $f(z)$ sono da ricercarsi nei punti in cui il denominatore si annulla:

$$e^{2iz}-1=0 \quad\Rightarrow\quad z=k\pi\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,. \tag{43}$$

In questi punti abbiamo dei poli semplici. Se, però, per qualche $k=k_0$ il numeratore si annullasse in $z=k_0\pi$, la corrispondente divergenza sparirebbe. Quindi andiamo a calcolare gli zeri del numeratore:

$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=1=e^{i2\pi k}\,, \tag{44}$$

che ha come soluzione

$$z=2k\pi\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,, \tag{45}$$

dove il numeratore ha uno zero del secondo ordine.

Quindi la funzione $f(z)$ ha dei poli singoli in $z=(2n+1)\pi$ (ovvero $z=k\pi$ con k dispari), mentre invece per $z=2n\pi$ ha degli zeri. In particolare, quindi

$$I=\int_\gamma f(z)\,dz=0\,. \tag{46}$$

Soluzione Esercizio 6

Affinché $u(x,y)$ possa essere considerata la parte reale di una funzione analitica deve essere armonica. Vediamo quindi per quali valori di a si abbia $\nabla^2 u(x,y)=0$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2aye^{-2axy}\sin(x^2-y^2)+2xe^{-2axy}\cos(x^2-y^2)\,, \tag{47}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =\ & 4a^2y^2e^{-2axy}\sin(x^2-y^2)-4axye^{-2axy}\cos(x^2-y^2)+2e^{-2axy}\cos(x^2-y^2)\\ & -4axye^{-2axy}\cos(x^2-y^2)-4x^2e^{-2axy}\sin(x^2-y^2)\,,\end{aligned} \tag{48}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2axe^{-2axy}\sin(x^2-y^2)-2ye^{-2axy}\cos(x^2-y^2)\,, \tag{49}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =\ & 4a^2x^2e^{-2axy}\sin(x^2-y^2)+4axye^{-2axy}\cos(x^2-y^2)-2e^{-2axy}\cos(x^2-y^2)\\ & +4axye^{-2axy}\cos(x^2-y^2)-4y^2e^{-2axy}\sin(x^2-y^2)\,,\end{aligned} \tag{50}$$

Quindi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4(a^2-1)(x^2+y^2)\sin(x^2-y^2)=0\,, \tag{51}$$

se $a = \pm 1$.

Per trovare la parte immaginaria (funzione armonica coniugata della $u(x,y)$, si utilizzano per esempio le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -2aye^{-2axy}\sin\left(x^2-y^2\right) + 2xe^{-2axy}\cos\left(x^2-y^2\right), \tag{52}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2axe^{-2axy}\sin\left(x^2-y^2\right) + 2ye^{-2axy}\cos\left(x^2-y^2\right), \tag{53}$$

e si integrano rispettivamente in y e in x a meno di una funzione dell'altra variabile, che risulta essere costante:

$$v(x,y) = -a\, e^{-2axy}\cos\left(x^2-y^2\right) + C\,. \tag{54}$$

Oppure si può notare che $\pm 2xy$ è la parte reale di $\mp iz^2 = \pm 2xy \mp i(x^2-y^2)$ e quindi se ne facciamo l'esponenziale, grazie alle formule di Eulero troviamo immediatamente che

$$e^{\mp iz^2} = e^{\pm 2xy}\left(\cos\left(x^2-y^2\right) \mp i\sin\left(x^2-y^2\right)\right)\,. \tag{55}$$

Quindi si ha

$$\pm ie^{\mp iz^2} = e^{\pm 2xy}\left(\sin\left(x^2-y^2\right) \pm i\cos\left(x^2-y^2\right)\right) \tag{56}$$

e quindi

$$v(x,y) = \pm e^{\pm 2xy}\cos\left(x^2-y^2\right) + C\,, \qquad \text{per} \quad a = \mp 1\,. \tag{57}$$