Esercizi di Meccanica

Roberto Bonciani*

Corso di Fisica Generale 1 (Matematica)
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2015-2016

*Email: roberto.bonciani@roma1.infn.it

Contents

1 Cinematica

1.1 Esercizio

Un punto si muove su una traiettoria rettilinea con accelerazione costante $a = 2$ m s^{-2} partendo da fermo.

1. Qual'è la sua velocità dopo 5 s?

2. Qual'è la velocità media nel lasso di tempo Δt da 0 a 5 s?

Soluzione

Abbiamo

$$\ddot{x} = a\,, \tag{1}$$

e quindi

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(0) + \int_0^t \ddot{x}\,dt = \dot{x}(0) + at = at\,, \tag{2}$$

dove abbiamo imposto la condizione iniziale $\dot{x}(0) = 0$ (poiché il punto parte da fermo).

Quindi, se $\Delta t = t_1 - t_0 = t_1 = 5$ s, si ha

$$\dot{x}(t_1) = at_1 = 10 \text{ m/s}\,. \tag{3}$$

Per calcolare la velocità media dobbiamo calcolare il Δx, ovvero lo spazio percorso dal punto nei 5 secondi. Integrando ulteriormente la 56, prendendo l'origine delle x nel punto iniziale $x(0) = x_0 = 0$, si ha

$$x(t) = x(0) + \int_0^t at\,dt = x(0) + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2 \tag{4}$$

e

$$x(t_1) = x_1 = 25 \text{ m}\,. \tag{5}$$

Allora

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1} = 5 \text{ m/s}\,. \tag{6}$$

1.2 Esercizio

Un punto si muove su una traiettoria rettilinea con accelerazione costante. In x_1 la sua velocità è v_1, in x_2 è v_2. Calcolare il valore dell'accelerazione.

Soluzione

Si ha

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}\,, \tag{7}$$

per cui

$$adx = vdv\,. \tag{8}$$

Integrando la 8 fra x_1 e x_2 (e corrispondentemente fra v_1 e v_2) si ha:

$$\int_{x_1}^{x_2} a dx = \int_{v_1}^{v_2} v dv \,, \tag{9}$$

ovvero

$$a(x_2 - x_1) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \,, \tag{10}$$

da cui

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2(x_2 - x_1)} \,. \tag{11}$$

Altrimenti si può integrare il moto $\ddot{x} = a$:

$$\dot{x}(t) - \dot{x}_0 = at \,, \tag{12}$$

$$x(t) - x_0 = \frac{1}{2}at^2 + \dot{x}_0 t \,, \tag{13}$$

ricavare il tempo dalla prima e sostituirlo nella seconda

$$t = \frac{\dot{x}(t) - \dot{x}_0}{a} \,, \tag{14}$$

$$x(t) - x_0 = ... = \frac{\dot{x}^2 - \dot{x}_0^2}{2a} \,. \tag{15}$$

Utilizzando questa relazione in $t = t_1$ e in $t = t_2$ si ha

$$2a(x_1 - x_0) \;=\; v_1^2 - \dot{x}_0^2 \,, \tag{16}$$

$$2a(x_2 - x_0) \;=\; v_2^2 - \dot{x}_0^2 \,, \tag{17}$$

che sottratte l'una dall'altra portano alla 11.

1.3 Esercizio

Un corpo viene lanciato dal suolo verso l'alto, lungo la verticale, con velocità iniziale $v_0 = 2$ m s^{-1}. Se è soggetto solo alla gravità, calcolare la quota massima che raggiunge e la velocità con cui ricade a terra.

1.4 Esercizio

Un punto materiale viene lanciato orizzontalmente con velocità iniziale $v_0 = 2$ m s^{-1} dalla sommità di una torre alta 100 m. Ricavare in funzione del tempo le espressioni della componente tangenziale $\mathbf{a}_t$ e normale $\mathbf{a}_n$ dell'accelerazione, supponendo che il corpo sia sottoposto solo all'accelerazione di gravità.

1.5 Esercizio

Un proiettile viene sparato orizzontalmente con velocità iniziale $v_0 = 30$ m s^{-1}. In assenza di attriti, qual'è il raggio di curvatura della traiettoria dopo 2 s dal lancio?

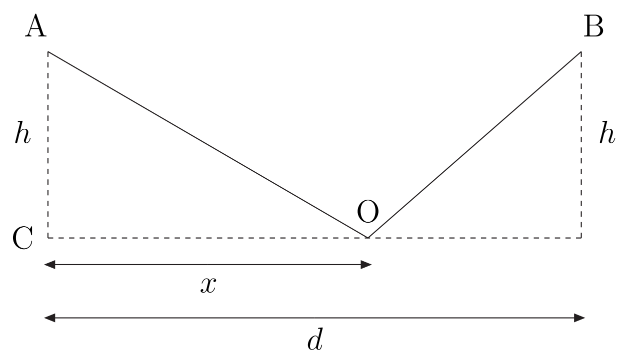
1.6 Esercizio

La piattaforma di una giostra si muove intorno all'asse con accelerazione angolare costante $\ddot{\theta} = 0.2$ rad s^{-2}, partendo da ferma. Calcolare

1. qual'è la sua velocità angolare dopo 2 s.
2. qual'è il modulo dell'accelerazione di un punto della piattaforma che disti 2 m dall'asse di rotazione.

1.7 Esercizio (riflessione)

Un punto descrive il percorso $\overline{\text{AOB}}$ con velocità costante in modulo (vedi figura). Dimostrare che il tempo impiegato è minimo se O si trova a $d/2$ da C.



Soluzione

Si ha

$$\overline{AOB} = s = \sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{h^2 + (d-x)^2}\,. \tag{18}$$

Per il tempo si ha

$$t_{\overline{AOB}} = \frac{s}{v} = \frac{\sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{h^2 + (d-x)^2}}{v}\,. \tag{19}$$

Troviamo gli estremi della funzione $t_{\overline{AOB}} = t_{\overline{AOB}}(x)$:

$$\frac{dt_{\overline{AOB}}}{dx} = \frac{1}{v}\left(\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} - \frac{(d-x)}{\sqrt{h^2+(d-x)^2}}\right) = 0\,, \tag{20}$$

che è verificata se

$$x^2 = (d-x)^2\,, \tag{21}$$

ovvero

$$x = \frac{d}{2}\,. \tag{22}$$

Inoltre

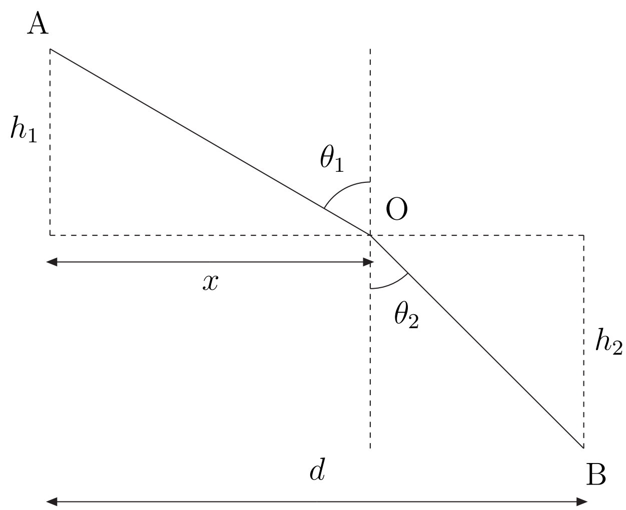
$$\left.\frac{d^2 t_{\overline{AOB}}}{dx^2}\right|_{d/2} = \ldots = \frac{2}{v}\frac{h^2}{\left(h^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0\,, \tag{23}$$

quindi il punto è effettivamente di minimo.

1.8 Esercizio (rifrazione)

Un punto descrive il percorso $\overline{\mathrm{AOB}}$ con velocità costante in modulo v_1 in $\overline{\mathrm{AO}}$ e v_2 in $\overline{\mathrm{OB}}$ (vedi figura). Dimostrare che il tempo impiegato è minimo se

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}\,. \tag{24}$$



Soluzione

Calcoliamo, in funzione di x, le due distanze $\overline{AO} = s_1$ e $\overline{OB} = s_2$:

$$s_1 = \sqrt{h_1^2 + x^2}\,, \tag{25}$$

$$s_2 = \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}\,. \tag{26}$$

Per i tempi abbiamo

$$t_1 = \frac{s_1}{v} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1}\,, \tag{27}$$

$$t_2 = \frac{s_2}{v} = \frac{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}{v_2}\,. \tag{28}$$

Il tempo totale impiegato per percorrere $\overline{AOB}$ è

$$t_{\overline{AOB}} = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}{v_2}\,. \tag{29}$$

estremando la funzione $t_{\overline{AOB}}$ si ha:

$$\frac{dt_{\overline{AOB}}}{dx} = \frac{x}{v_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}\,, \tag{30}$$

$$= \frac{\sin\theta_1}{v_1} - \frac{\sin\theta_2}{v_2} = 0\,, \tag{31}$$

dove abbiamo posto

$$\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \sin\theta_1\,, \qquad \frac{d-x}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = \sin\theta_2\,. \tag{32}$$

Quindi

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}\,. \tag{33}$$

Si vede poi che è un minimo

$$\frac{dt_{\overline{AOB}}}{dx}... > 0\,. \tag{34}$$

1.9 Esercizio

Un proiettile viene sparato da terra ($x = 0$) con velocità iniziale v_0 inclinata di θ sull'orizzontale. In assenza di attriti, si determini

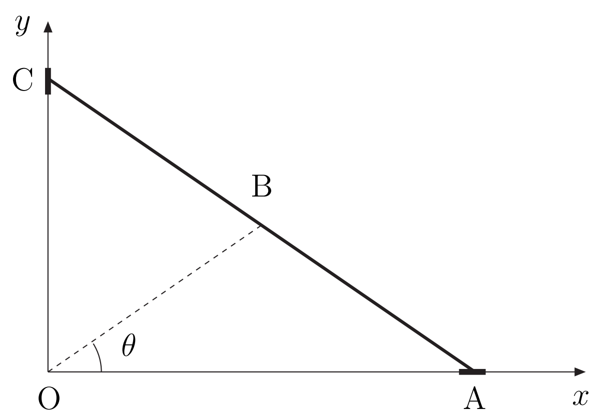
1. qual'è la gittata massima in funzione di θ;
2. qual'è l'alzata per colpire un punto a distanza $x = h$.

1.10 Esercizio

Un aereo viaggia in orizzontale alla velocità di $v = 600$ km/h ad un'altezza di $h = 1$ km. A $t = 0$ l'aereo sgancia un oggetto che deve cadere in un certo punto P. Calcolare sotto quale angolo rispetto all'orizzontale deve essere visto P dal punto di sgancio.

1.11 Esercizio

Un'asta $\overline{\mathrm{AB}} = d$ si può muovere con gli estremi A e C vincolati a scorrere lungo gli assi x e y rispettivamente. Se A si muove con velocità costante v_A, determinare velocità e accelerazione del punto C e il moto del punto B posto a metà asta.



1.12 Esercizio

Dimostrare che per una funzione $y = f(x)$, l'espressione della curvatura della traiettoria nel punto x_0 è data da

$$k(x_0) = \frac{|f''(x_0)|}{(1 + f'^2(x_0))^{\frac{3}{2}}} \tag{35}$$

1.13 Esercizio

Il vettore posizione di un punto materiale che si muove nel piano è

$$\begin{aligned} x(t) &= A\,t \\ y(t) &= -B\,t^2 + C\,t\,, \end{aligned} \tag{36}$$

con $A = 2$ m/s, $B = 5$ m/s^2 e $C = 2$ m/s. Calcolare il raggio di curvatura nel punto di massima altezza di P.

1.14 Esercizio

Un punto si muove in verso anti-orario su una circonferenza di raggio $R = 2$ m, con legge oraria $s = at^2$, $a = 4$ m/s^2. s è misurata a partire dal punto di coordinate $(2, 0)$. Calcolare

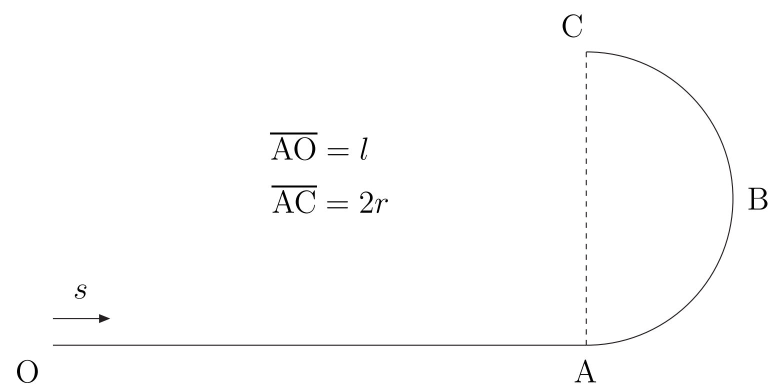
1. l'accelerazione del punto in funzione del tempo e della positione sulla circonferenza;
2. il tempo impiegato a percorrere il primo giro.

1.15 Esercizio

Un punto materiale descrive la traiettoria in figura con la legge oraria

$$s(t) = \frac{l}{2} - ht^2 + bt\,, \tag{37}$$

con $l = 3$ m, $r = 1$ m, $h = 6$ m/s^2.



1. Sapendo che la velocità scalare quando il punto passa per la prima volta in B è 1/2 di quella con cui passa per la prima volta in A, calcolare la costante b.
2. Calcolare il vettore accelerazione del punto quando passa in A e in B.
3. È possibile calcolare il vettore accelerazione in C?

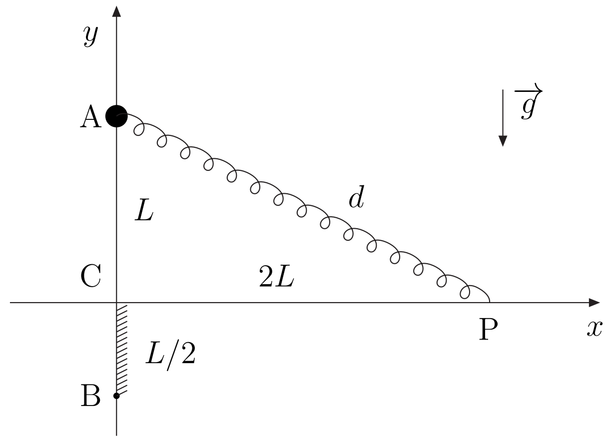
1.16 Esercizio (deviazione verso Oriente)

All'Equatore li lascia cadere da fermo un grave da un'altezza $h = 100$ m dal suolo. Calcolare il punto in cui il grave toccherà terra.

2 Meccanica del Punto Materiale

2.1 Esercizio

Un punto materiale di massa m è vincolato a scorrere lungo una guida vertivale fissa ed è collegato mediante una molla ideale di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla ad un punto P che si trova a distanza $2L$ dalla guida. La guida è liscia al di sopra del punto C, mentre sotto C è scabra, con coefficienti di attrito statico e dinamico dati rispettivamente da μ_s e μ_d.



Inizialmente il punto materiale viene abbandonato con velocità nulla nel punto A, che si trova a distanza L da C. Si chiede:

1. Quanto tempo impiega il punto materiale per andare da A a C?

2. Quanto deve valere μ_d affinché il punto materiale raggiunga B senza oltrepassarlo?

3. Per quali valori di μ_s una volta raggiunto B vi rimane in quiete?

Dati numerici: $kL = 4$ mg, $k/m = 9$ s^{-2}.

Soluzione

1. Nel tratto AC si ha:
$$m\ddot{y} = mg - ky\,, \tag{38}$$
ovvero
$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y + g = 0\,. \tag{39}$$
Pongo
$$\xi = y + \frac{mg}{k} \tag{40}$$
e ottengo l'equazione del moto armonico in forma canonica:
$$\ddot{\xi} + \frac{k}{m}\xi = 0\,. \tag{41}$$

La soluzione è

$$\xi(t) = y(t) + \frac{mg}{k} = A\cos(\omega t + \phi)\,, \tag{42}$$

dove $\omega = \sqrt{k/m}$.

Imponendo le condizioni iniziali si ha:

$$y(t) = -\frac{mg}{k} + \left(L + \frac{mg}{k}\right)\cos(\omega t)\,. \tag{43}$$

Il punto arriva in $y = 0$ a

$$t_0 = \frac{1}{\omega}\arccos\left(\frac{mg}{mg + kL}\right) = 0.46\ \text{s}\,. \tag{44}$$

2. Utilizziamo il teorema delle forze vive. Vogliamo che il punto materiale si fermi in B, quindi

$$L_{AB} = T(A) - T(B) = 0\,. \tag{45}$$

D'altra parte:

$$L_{AB} = V(A) - V(B) + \int_C^B \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{y}\,, \tag{46}$$

Definiamo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale in $y = 0$. Per adesso definiamo lo sero dell'energia potenziale elastica in $d = 0$. Allora si ha:

$$\begin{aligned} V(A) &= mgL + \frac{1}{2}k[L^2 + (2L)^2]\,, & (47)\\ V(B) &= mg\left(-\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{2}k\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 + (2L)^2\right]\,, & (48)\\ \mathbf{F}_t &= \mu_d N\,\mathbf{j}\,, & (49)\\ d\mathbf{y} &= d(-|y|)\,(-\mathbf{j}) = dy\,\mathbf{j}\,. & (50) \end{aligned}$$

L'Eq. (46) diventa:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{3}{2}mgL + \frac{3}{8}kL^2 + \int_0^{-\frac{L}{2}} \mu_d N dy\,, & (51)\\ &= \frac{3}{2}mgL + \frac{3}{8}kL^2 - \mu_d N\frac{L}{2}\,. & (52) \end{aligned}$$

NOTA: nel ΔV il pezzo costante $1/2k(2L)^2$ si cancella. Avremmo potuto ridefinire dall'inizio lo zero dell'energia potenziale elastica in (0,0), ovvero avremmo potuto definire tale energia a meno del pezzo $1/2k(2L)^2$.

La reazione vincolare normale N si trova applicando il secondo principio al punto materiale, lungo le x. Infatti si ha:

$$N = 2kL\,. \tag{53}$$

Infine:

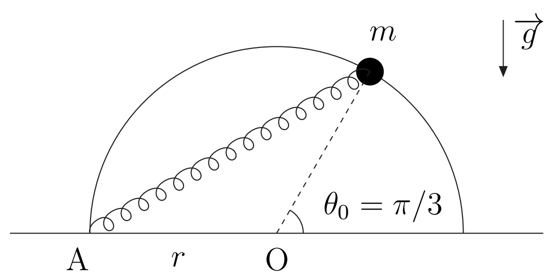
$$\mu_d = \frac{1}{kL^2}\left(\frac{3}{2}mgL + \frac{3}{8}kL^2\right) = \frac{3mg}{2kL} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}\,. \tag{54}$$

3. In B poniamo $\dot{y}(B) = 0$ e applichiamo quindi le equazioni della statica.

   Lungo le x è sempre
$$N = 2kL\,. \tag{55}$$
   Lungo le y si ha:
$$k\frac{L}{2} - mg - F_t = 0\,, \tag{56}$$
   dove
$$F_t \leq \mu_s N = 2\mu_s kL\,. \tag{57}$$
   Risostituendo nella (56) si ha:
$$k\frac{L}{2} - mg \leq 2\mu_s kL\,, \tag{58}$$
   ovvero
$$\mu_s \geq \frac{1}{4} - \frac{mg}{2kL} = \frac{1}{8}\,. \tag{59}$$

2.2 Esercizio

Un punto materiale di massa m è appoggiato su un vincolo ideale liscio, a forma di semicirconferenza, con centro O e raggio $r = 60$ cm. Il punto materiale è collegato al punto A mediante una molla ideale di costante elastica $k = 2$ N/m e lunghezza di riposo trascurabile (vedi figura).



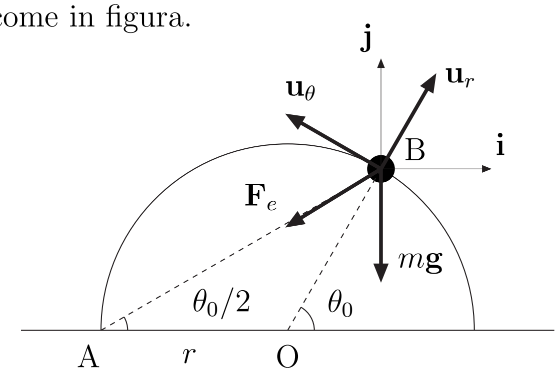
1. Calcolare la massa m affinché il punto sia in equilibrio nella configurazione di figura con $\theta_0 = \pi/3$. Per tale valore di m, calcolare la reazione vincolare all'equilibrio. Di che tipo di equilibrio si tratta?

2. All'istante $t = 0$, il punto materiale viene leggermente spostato dalla posizione di equilibrio nel senso antiorario e comincia a muoversi. Calcolare, se esiste, l'angolo θ in cui il punto materiale si stacca dal vincolo.

2.2.1 Soluzione

1. Si può risolvere con $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ oppure con l'energia. Partiamo con la prima.

   Si passa ad un sistema di coordinate polari, con la coppia di versori $\{\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta\}$ centrati sul punto materiale, come in figura.



   Il punto materiale è soggetto alla forza peso

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{j} = -mg\sin\theta_0\,\mathbf{u}_r - mg\cos\theta_0\,\mathbf{u}_\theta\,, \tag{60}$$

   alla forza di richiamo elastico

$$\mathbf{F}_e = -k\overline{\mathrm{AB}}\cos\frac{\theta_0}{2}\,\mathbf{u}_r + k\overline{\mathrm{AB}}\sin\frac{\theta_0}{2}\,\mathbf{u}_\theta\,, \tag{61}$$

   dove $\overline{\mathrm{AB}} = 2r\cos\theta_0/2$, e alla reazione vincolare $\mathbf{N}$. Siccome il vincolo è liscio, la reazione vincolare sarà normale alla circonferenza e si avrà

$$\mathbf{N} = N\,\mathbf{u}_r\,. \tag{62}$$

   Proiettando lungo $\mathbf{u}_r$ e lungo $\mathbf{u}_\theta$, si hanno le due equazioni seguenti:

$$N - mg\sin\theta_0 - 2kr\cos^2\frac{\theta_0}{2} = 0\,, \tag{63}$$

$$2kr\cos\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_0}{2} - mg\cos\theta_0 = 0\,. \tag{64}$$

   Dall'Eq. (64) si ricava

$$m = \frac{2kr\cos\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_0}{2}}{g\cos\theta_0} = \frac{kr}{g}\tan\theta_0 = 0.212\ \mathrm{kg}\,, \tag{65}$$

   e sostituendola nell'Eq. (63) si trova N:

$$N = kr(\sin\theta_0\tan\theta_0 + 2\cos^2\frac{\theta_0}{2}) = kr\left(\frac{3}{2} + 2\frac{3}{4}\right) = 3kr = 3.6\ \mathrm{N}\,. \tag{66}$$

   L'equilibrio è instabile. Infatti, l'energia potenziale del punto materiale di massa

$$m = \frac{\sqrt{3}kr}{g}\,, \tag{67}$$

nella generica posizione θ, prendendo come zero per l'energia potenziale della gravità il piano orizzontale, è

$$V(\theta) = mgr\sin\theta + \frac{1}{2}k\left(2r\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 = mgr\sin\theta + 2kr^2\cos^2\frac{\theta}{2} \tag{68}$$

Imponendo l'equilibrio a $\theta = \theta_0$ si ottiene esattamente la soluzione (67):

$$\left.\frac{dV}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_0} = mgr\cos\theta_0 - 2kr^2\cos\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\theta_0}{2} = mgr\cos\theta_0 - kr^2\sin\theta_0 = 0 \tag{69}$$

da cui, appunto, la (67).

Calcolando la derivata seconda si trova:

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_0} = -mgr\sin\theta_0 - kr^2\cos\theta_0 = -2kr^2 < 0\,. \tag{70}$$

2. Per rispondere alla seconda domanda, bisogna studiare la reazione vincolare N al variare di θ e vedere se nel range $\pi < \theta < \pi/3$ tale reazione si annulla. In quel punto il punto materiale si stacca dal vincolo.

   L'espressione di N si trova dalla seconda legge della dinamica lungo $\mathbf{u}_r$:

$$-m\frac{v^2}{r} = N - mg\sin\theta - 2kr\cos^2\frac{\theta}{2}\,, \tag{71}$$

   da cui

$$N = -m\frac{v^2}{r} + mg\sin\theta + 2kr\cos^2\frac{\theta}{2}\,. \tag{72}$$

   Per trovare $N = N(\theta)$ basta calcolare v^2 in funzione di θ e sostituirlo nella (72).

   Utilizziamo adesso la conservazione dell'energia meccanica.

   L'energia meccanica del punto in $\theta \simeq \theta_0$ è data dalla sola energia potenziale:

$$E_0 = mgr\sin\theta_0 + 2kr^2\cos^2\frac{\theta_0}{2} = 3kr^2\,. \tag{73}$$

   In un θ generico invece abbiamo:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgr\sin\theta + 2kr^2\cos^2\frac{\theta}{2}\,. \tag{74}$$

   Uguagliando E_0 a E si ottiene:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgr\sin\theta + 2kr^2\cos^2\frac{\theta}{2} = 3kr^2\,, \tag{75}$$

   e quindi, moltiplicando a destra e a sinistra per $2/r$ si ottiene:

$$m\frac{v^2}{r} = -2mg\sin\theta - 4kr\cos^2\frac{\theta}{2} + 6kr\,. \tag{76}$$

Sostituendo l'Eq. (76) nella (72), si ottiene

$$N = 3mg \sin\theta + 6kr \cos^2 \frac{\theta}{2} - 6kr = 3mg \sin\theta - 6kr \sin^2 \frac{\theta}{2} . \tag{77}$$

La possibile posizione dove n si annulla sarà data dalle soluzioni dell'equazione

$$3mg \sin\theta + 6kr \cos^2 \frac{\theta}{2} - 6kr = 3mg \sin\theta - 6kr \sin^2 \frac{\theta}{2} = 0 . \tag{78}$$

Conviene passare alle espressioni in $t = \tan\theta/2$:

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} , \tag{79}$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{t^2}{1+t^2} , \tag{80}$$

e quindi

$$6mg\, t - 6kr\, t^2 = 6kr\, t(\sqrt{3} - t) = 0 . \tag{81}$$

La (81) ha due soluzioni:

$$t = 0 , \tag{82}$$

$$t = \sqrt{3} . \tag{83}$$

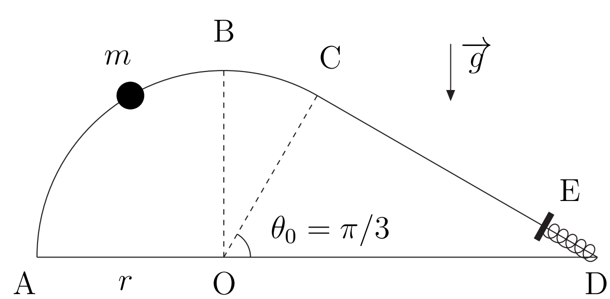
La prima soluzione implica $\theta = 0$, che è fuori dal nostro dominio e quindi va scartata. La seconda dà

$$\theta = 2 \arctan \sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi . \tag{84}$$

Quindi in $\theta = 120°$ il punto materiale si stacca dalla superficie.

2.3 Esercizio

Un anellino di massa $m = 200$ g è vincolato a muoversi sotto l'azione della gravità su un vincolo (vedi la figura) formato da un'arco di circonferenza, AC, sotteso ad un angolo di 120° e con raggio $r = 60$ cm, e da un tratto rettilineo, CD. Il tratto CD è tale che l'angolo $\widehat{\mathrm{OCD}}$ sia retto. Il vincolo è liscio nel tratto AC, ma fra vincolo e punto materiale c'e' attrito dinamico, con coefficiente d'attrito $\mu_d = 0.2$, nel tratto CD. Alla fine del tratto CD, c'è una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo $\overline{\mathrm{ED}} = l_0 = 20$ cm.



All'istante $t = 0$ l'anello si trova in A e una forza impulsiva agisce su di lui per un tempo infinitesimo, trasferendogli un impulso $p = 0.79$ kg m s^{-1} diretto verso l'alto.

1. Calcolare la reazione vincolare in C, in modulo, direzione e verso.

2. Calcolare il valore minimo della costante elastica della molla k affinché il punto materiale torni in A.

3. ... oppure: dato k qual'e' la differenza di velocità in B fra il primo e il secondo passaggio?

2.3.1 Soluzione

Come prima cosa determiniamo la geometria dellla traiettoria.

Il tratto $\overline{\mathrm{AC}}$ sarà lungo $2/3\pi r$. Inoltre, siccome l'angolo $\widehat{\mathrm{OCD}}$ è retto, il tratto $\overline{\mathrm{CD}}$ sarà dato da

$$\overline{\mathrm{CD}} = r\ \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\,r\,. \tag{85}$$

La forza impulsiva comunica al punto materiale una velocità iniziale data da

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{p}}{m} = v_0\,\mathbf{j}\,, \tag{86}$$

dove abbiamo preso un sistema di riferimento cartesiano con asse y verso l'alto.

1. Determiniamo la velocità con cui il punto materiale arriva in C. Nel tratto AC il punto è soggetto soltanto a forze conservative. Dalla conservazione dell'energia, prendendo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale alla quota A, si ha

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2\,, \tag{87}$$

e

$$E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgr\sin\theta_0 = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}mgr\,. \tag{88}$$

Dalle Eq. (87) e (88) si ottiene

$$v_C^2 = v_0^2 - \sqrt{3}gr\,. \tag{89}$$

Per trovare l'espressione di N in C si applica la seconda legge della dinamica proiettata lungo la direzione radiale:

$$m\frac{v_C^2}{r} \quad = \quad -N + mg\sin\theta_0\,, \tag{90}$$

da cui

$$N = \frac{\sqrt{3}}{2} mg - m\frac{v_C^2}{r}\,, \tag{91}$$

e sostituendo la (89)

$$N = \frac{3\sqrt{3}}{2} mg - m\frac{v_0^2}{r} = -0.1 \text{ N}\,, \tag{92}$$

cioè N ha modulo 28.24 N e verso tale da puntare verso il centro della circonferenza. In componenti

$$\mathbf{N} = -N\cos\theta_0\,\mathbf{i} - N\sin\theta_0\,\mathbf{j}\,. \tag{93}$$

E per v_C si ha:

$$v_C = \sqrt{-\frac{Nr}{m} + rg\sin\theta_0} = 2.325 \text{ ms}^{-1}\,. \tag{94}$$

2. Consideriamo adesso il tratto CD. In C il punto arriva con velocità v_C ed energia cinetica

$$T_C = \frac{1}{2} m v_C^2\,. \tag{95}$$

Il punto poi continuerà il suo moto lungo il tratto inclinato CE; in E la molla comincia a comprimersi ed agisce su m frenandolo (insieme alla forza d'attrito). Ad un certo punto m si ferma, in posizione E'; la molla è compressa al massimo, di EE' = Δl. Poi m viene risparato verso l'alto.

Applicando il teorema dell'energia cinetica si ha:

$$L_{CE'} = T_{E'} - T_C = -\frac{1}{2} m v_C^2\,. \tag{96}$$

D'altra parte

$$L_{CE'} = V_C - V_{E'} - \int_C^{E'} \mu_d N\, ds = mg(y(C) - y(E')) - \frac{1}{2}k\Delta l^2 - \int_C^{E'} \mu_d N\, ds\,, \tag{97}$$

dove $y(C) = r\sin\theta_0 = r\sqrt{3}/2$ e $y(E') = (l_o - \Delta l)\cos\theta_0 = (l_o - \Delta l)/2$. Per calcolare il lavoro fatto dalla forza d'attrito bisogna trovare N. Scomponendo le forze lungo la direzione perpendicolare a CD, si ottiene:

$$N = mg\sin\theta_0\,, \tag{98}$$

e quindi, mettendo insieme le Eq. (96) e (97), si ha

$$-\frac{1}{2} m v_C^2 = \frac{1}{2} mg(\sqrt{3}r - l_0 + \Delta l) - \frac{1}{2}k\Delta l^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_d mg(r - l_0 + \Delta l)\,, \tag{99}$$

$$= mg\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\mu_d)r - \frac{(1-\sqrt{3}\mu_d)}{2} l_0\right] + \frac{(1-\sqrt{3}\mu_d)}{2} mg\,\Delta l - \frac{1}{2}k\Delta l^2 \tag{100}$$

Dalla (100) si può ricavare Δl in funzione di k:

$$\Delta l^2 - \frac{(1-\sqrt{3}\mu_d)mg}{k}\,\Delta l - \frac{mg}{k}\left[\sqrt{3}(1-\mu_d)r - (1-\sqrt{3}\mu_d)l_0\right] - \frac{m v_C^2}{k} = 0\,, \tag{101}$$

$$\Delta l_{1,2} = -\frac{(1-\sqrt{3}\mu_d)mg}{2k} \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-\sqrt{3}\mu_d)^2m^2g^2}{k^2}+\frac{4mg}{k}\left[\sqrt{3}(1-\mu_d)r-(1-\sqrt{3}\mu_d)l_0\right]+\frac{4mv_C^2}{k}} \quad (102)$$

Prendiamo la soluzione positiva:

$$\Delta l_{1,2} = -\frac{(1-\sqrt{3}\mu_d)mg}{2k} +\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-\sqrt{3}\mu_d)^2m^2g^2}{k^2}+\frac{4mg}{k}\left[\sqrt{3}(1-\mu_d)r-(1-\sqrt{3}\mu_d)l_0\right]+\frac{4mv_C^2}{k}} \quad (103)$$

A questo punto, il punto materiale parte da fermo in Δl, con un'energia meccanica che è data dalla sola energia potenziale

$$E = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + mg(l_0-\Delta l)\cos\theta_0\,. \quad (104)$$

Se vogliamo che il punto ritorni in A, dobbiamo imporre che la velocita' in B sia in modulo positiva

$$|\mathbf{v}_B| > 0\,. \quad (105)$$

Per trovare applichiamo di nuovo il teorema dell'energia cinetica

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_B^2 &= L_{E'B} = V(E') - V(B) - \mu_d mg\sin\theta_0(r-l_0+\Delta l)\,, && (106)\\
&= mg(y(E')-y(B)) - \mu_d mg\sin\theta_0(r-l_0+\Delta l)\,, && (107)\\
&= mg(l_0-\Delta l)\cos\theta_0 - mgr + \frac{1}{2}k\Delta l^2 - \mu_d mg\sin\theta_0(r-l_0+\Delta l)\,, && (108)\\
&= -\frac{(1-\sqrt{3}\mu_d)}{2}mg\,\Delta l + \frac{1}{2}k\Delta l^2 \\
&\quad -mg\sqrt{3}\mu_d\Delta l + \frac{mg}{2}\left[(1+\sqrt{3}\mu_d)\,l_0 - (2+\sqrt{3}\mu_d)\,r\right] && (109)
\end{aligned}$$

L'espressione al primo rigo del membro di destra può essere presa dall'Eq. (100):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_B^2 &= mg\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\mu_d)r - \frac{(1-\sqrt{3}\mu_d)}{2}l_0\right] + \frac{1}{2}mv_C^2 \\
&\quad -mg\sqrt{3}\mu_d\Delta l + \frac{mg}{2}\left[(1+\sqrt{3}\mu_d)\,l_0 - (2+\sqrt{3}\mu_d)\,r\right]\,, && (110)\\
&= \frac{1}{2}mv_C^2 + \sqrt{3}\mu_d mgl_0 + \frac{mg\sqrt{3}r}{2}\left(1-2\frac{\sqrt{3}}{3}-2\mu_d\right) - mg\sqrt{3}\mu_d\Delta l && (111)
\end{aligned}$$

Il modulo della velocità v_B deve essere maggiore di zero, per cui

$$\frac{v_C^2}{2\sqrt{3}\mu_d g} + l_0 + \frac{r}{2\sqrt{3}\mu_d}(\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}\mu_d) - \Delta l > 0\,, \quad (112)$$

ovvero

$$\Delta l < \frac{v_C^2}{2\sqrt{3}\mu_d g} + l_0 + \frac{r}{2\sqrt{3}\mu_d}(\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3}\mu_d) = C\,, \tag{113}$$

dove si ha $C = 0.164$ m.

Sostituendo il valore di Δl in funzione di k nella disuguaglianza, si ha

$$\sqrt{\frac{A^2}{k^2} + \frac{B}{k}} - \frac{A}{k} < C\,, \tag{114}$$

dove $A = 0.64$ N/m e $B = 2.46$ N/m. Portando a sinistra il termine A/k e quadrando, si ottiene

$$\frac{A^2}{k^2} + \frac{B}{k} < \frac{A^2}{k^2} + C^2 + \frac{2AC}{k}\,, \tag{115}$$

da cui

$$k > \frac{B - 2AC}{C^2} = 83.94 \text{ N/m}\,. \tag{116}$$

Questo valore di k corrisponde ad una compressione della molla pari a

$$\Delta l = 0.164 \text{ m}\,. \tag{117}$$

NB I passaggi dalla (107) alla (111) possono essere accorpati prendendo globalmente il cammino da B ad E' a C. Infatti, in questo cammino la parte dell'energia potenziale della molla se ne va, l'energia potenziale grazitazionale è immediata e rimane solo da integrare il lavoro della forza d'attrito. Si arriva direttamente alla (111).