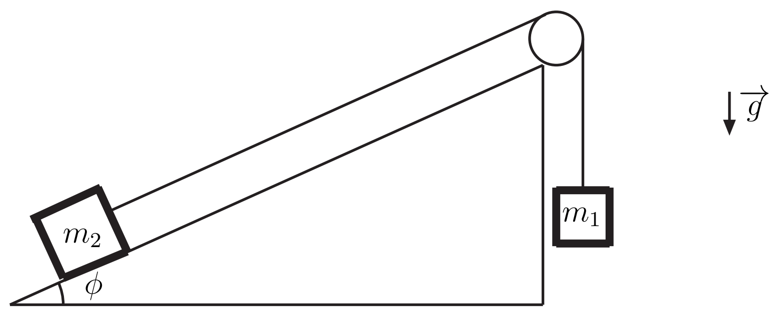
Esonero 9 Novembre 2018

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2018-2019

Esercizio 1

Due corpi puntiformi, di massa $m_1 = 1$ kg ed $m_2 = 3$ kg, sono collegati da una fune ideale (inestensibile e di massa nulla), che può scorrere senza attrito su un supporto posto sulla sommità di un piano liscio, inclinato di un angolo $\phi = \pi/6$ rispetto all'orizzontale (vedi figura).

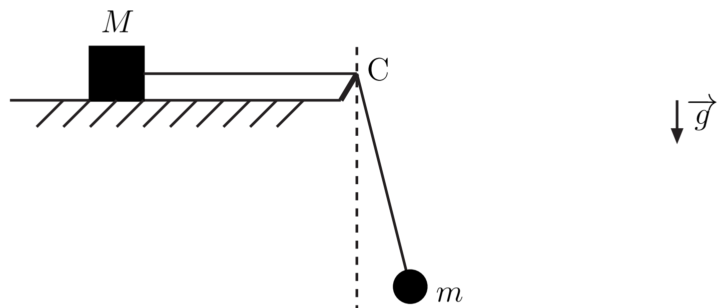


m_1 è inizialmente bloccato a terra ($H_0 = 0$) e in questa configurazione m_2 è fermo ad una quota $h_0 = 50$ cm da terra. All'istante $t = 0$, m_1 viene sbloccato ed m_2 comincia a scendere lungo il piano inclinato, trascinando m_1.

1. Calcolare l'accelerazione con cui m_2 scende lungo il piano inclinato.
2. Calcolare il tempo t_1 che occorre ad m_1 per salire alla quota $H_1 = 20$ cm e la sua velocità in quell'istante.
3. Consideriamo ora il caso in cui lungo il piano inclinato agisca un attrito radente con coefficiente $\mu_d = 0.1$. Utilizzando considerazioni energetiche, determinare la velocità di m_2 nell'istante in cui m_1 è salito di H_1.

Esercizio 2

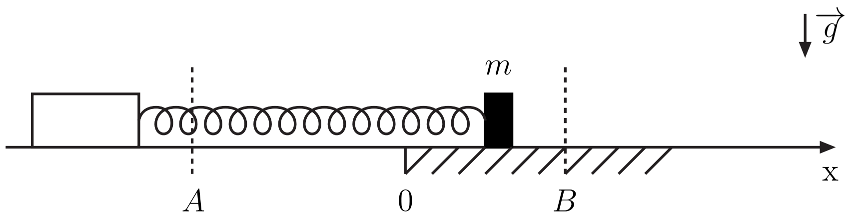
Nel dispositivo mostrato in figura la massa $M = 1$ kg è appoggiata ad un piano orizzontale scabro con coefficiente d'attrito statico $\mu_s = 0.5$. Un filo ideale collega la massa M alla massa $m = 0.3$ kg, sospesa nel vuoto. Il filo può scorrere senza attrito sul punto C.



1. Calcolare il massimo valore dell'ampiezza di oscillazione della massa m che NON produca lo spostamento di M.

Esercizio 3

Un corpo di massa m è fissato all'estremità di una molla ideale di costante elastica $k = 1$ N/m, poggiata su un piano orizzontale. Con la molla in condizione di equilibrio, la massa è nella posizione $x = 0$ (vedi figura). Per $x < 0$ il piano è liscio, mentre per $x > 0$ c'è attrito radente con coefficiente d'attrito μ_d fra massa m e piano. La massa viene spostata nella posizione $x = A$, con $\overline{0A} = a = 50$ cm, e poi lasciata libera da ferma. Sotto l'azione della molla, la massa torna nella posizione $x = 0$ e vi arriva dopo un tempo $t = 1$ s. Poi prosegue nel suo moto e arriva in B, con $\overline{0B} = b = 20$ cm, dove si ferma prima di tornare verso $x = 0$.



1. Calcolare il valore della massa m.
2. Calcolare il valore del coefficiente d'attrito μ_d.

Soluzione Esercizio 1

1. Per calcolare l'accelerazione applichiamo il secondo principio della dinamica separatamente al corpo m_1 e m_2. Prendiamo come senso positivo quello che vede scendere m_2 lungo il piano inclinato e indichiamo con T la tensione della fune. Si ha

$$\begin{aligned} m_2\ddot{x} &= m_2 g \sin\phi - T \,, && (1)\\ m_1\ddot{x} &= T - m_1 g \,, && (2) \end{aligned}$$

   da cui, sommando le due equazioni

$$\ddot{x} = a = g\,\frac{m_2 \sin\phi - m_1}{m_1 + m_2} = 1.225\ \mathrm{m\,s^{-2}}\,. \tag{3}$$

   Notare che a è positiva e quindi effettivamente con questi valori delle masse, m_2 scende lungo il piano inclinato.

2. m_2 si muove di moto uniformemente accelerato, con accelerazione $\ddot{x}$. Partendo da fermo, si può scrivere direttamente l'equazione oraria

$$H(t) = \frac{1}{2}at^2 \tag{4}$$

   e quindi per arrivare ad H_1 impiega

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H_1}{a}} = 0.57\ \mathrm{s}\,. \tag{5}$$

   La velocità di m_2 a $t = t_1$ sarà

$$\dot{x}(t = t_1) = v_1 = a\,t_1 = 0.7\ \mathrm{m/s}\,. \tag{6}$$

3. Se m_1 è salito di H_1, vuol dire che m_2 è scesa di H_1 lungo il piano inclinato, muovendosi dal punto iniziale al punto finale che chiameremo A e B rispettivamente. Utilizziamo il teorema delle forze vive. Si ha:

$$L_{AB} = T(B) - T(A) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2\,, \tag{7}$$

   poiché le due masse hanno velocità uguale e partono da ferme, così che l'energia cinetica iniziale è nulla.

   D'altra parte, si ha

$$L_{AB} = V(A) - V(B) + \int_A^B \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{r}\,, \tag{8}$$

   dove

$$\begin{aligned} V(A) &= m_2 g h_0\,, && (9)\\ V(B) &= m_1 g H_1 + m_2 g(h_0 - H_1 \sin\phi)\,, && (10) \end{aligned}$$

$$\int_A^B \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{r} \;=\; -\mu_d N H_1 = -\mu_d m_2 g \cos\phi H_1 \,. \tag{11}$$

In totale

$$L_{AB} = m_2 g H_1 \sin\phi - m_1 g H_1 - \mu_d m_2 g \cos\phi H_1 = 0.47 \text{ J} \,. \tag{12}$$

Uguagliando le due espressioni per L_{AB} si ottiene

$$v = \sqrt{\frac{2}{m_1 + m_2}(m_2 g H_1 \sin\phi - m_1 g H_1 - \mu_d m_2 g \cos\phi H_1)} = 0.485 \text{ m/s} \,. \tag{13}$$

Soluzione Esercizio 2

Concentriamoci sulla massa M. Affinché rimanda ferma sul piano orizzontale si deve avere che:

$$N \;=\; Mg \,, \tag{14}$$

$$T \;=\; F_t \,, \tag{15}$$

dove F_t è la forza d'attrito statico e T la tensione della corda. Siccome si ha anche

$$F_t \leq \mu_s N = \mu_s M g \,, \tag{16}$$

questa relazione ci dà un valore massimo della tensione della corda affinché M rimanga in posizione. Infatti deve essere

$$T \leq \mu_s M g \,, \tag{17}$$

Esaminando la parte del perndolo, si può trovare T in funzione dell'ampiezza massima di oscillazione del pendolo e quindi rispondere alla domanda del testo.

Applichiamo il secondo principio lungo la direzione radiale, ovvero lungo la fune che unisce la massa m al punto C. Indicando con r la lunghezza del filo si ha

$$m r \dot{\theta}^2 = T - m g \cos\theta \,, \tag{18}$$

da cui

$$T = m r \dot{\theta}^2 + m g \cos\theta \,. \tag{19}$$

Vediamo che ci sono due termini che entrano nel modulo della tensione T: uno è dovuto alla componente radiale della forza peso, ed è massima per $\theta = 0$, mentre è minima per $\theta = \pi/2$. L'altro è dato dal termine di accelerazione radiale. Siccome questa va con v^2, anche questo termine sarà massimo quando la massa m raggiunge la configurazione a $\theta = 0$.

Allora possiamo trovare il massimo di T in funzione dell'ampiezza massima di oscillazione θ_0 e usare la (17) per trovare il massimo di θ_0 che sia compatibile con l'equilibrio di M. In θ_0 il punto m è istantaneamente fermo. Utilizzando la conservazione dell'energia, possiamo dunque scrivere

$$\frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}_{max}^2 = m g r (1 - \cos\theta_0) \,, \tag{20}$$

e quindi

$$T_{max} = T(\theta = 0) = m r \dot{\theta}_{max}^2 + m g = m g (3 - 2\cos\theta_0) \,, \tag{21}$$

Ricordando la (17), si ha

$$mg(3 - 2\cos\theta_0) \leq \mu_s M g\,, \tag{22}$$

ovvero

$$\cos\theta_0 \geq \frac{1}{2}\left(3 - \frac{\mu_s M}{m}\right) = \frac{2}{3}\,. \tag{23}$$

Quindi

$$-\theta_{0,max} \leq \theta_0 \leq \theta_{0,max}\,, \tag{24}$$

dove

$$\theta_{0,max} = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 0.84 = 48.2°\,. \tag{25}$$

Soluzione Esercizio 3

1. Nel primo tratto, da A a $x = 0$, il moto è un moto armonico con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{26}$$

Il tratto $0A$ costituisce un quarto di periodo di tale moto e quindi

$$T = 4t_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,, \tag{27}$$

da cui si ricava

$$m = k\left(\frac{4t_1}{2\pi}\right)^2 = 0.41\ \text{kg}\,. \tag{28}$$

2. Per trovare μ_d si può utilizzare il teorema delle forze vive. Infatti, consideriamo il moto da A a B. Si avrà

$$T(A) = T(B) = 0\,. \tag{29}$$

Utilizziamo il teorema delle forze vive:

$$0 = L_{AB} = \frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{2}kb^2 + \int_0^B \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{x} = \frac{1}{2}k(a^2 - b^2) - \mu_d mgb\,. \tag{30}$$

Da questa relazione si ricava

$$\mu_d = \frac{k(a^2 - b^2)}{2mgb} = 0.13\,. \tag{31}$$