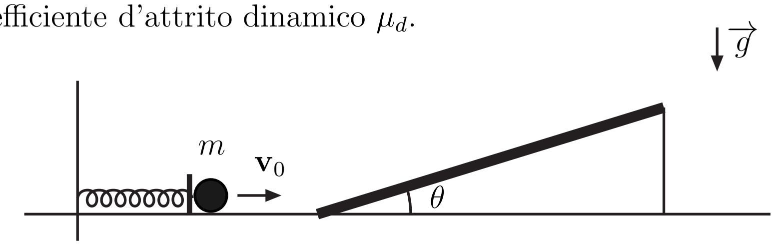
Esonero 14 Novembre 2016

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1
Università degli Studi di Roma “La Sapienza”
Anno Accademico 2016-2017

Esercizio 1

Un corpo di massa m è inizialmente fermo su un piano orizzontale liscio, appoggiato ad una molla ideale di costante elastica k, compressa di un tratto L e tenuta ferma da un opportuno sistema di bloccaggio. Quando il blocco viene rimosso, la massa m viene sparata con velocità v_0 verso un piano, inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale, scabro (rappresentato in figura da una linea in grassetto). All'istante $t = t_0$ la massa m comincia a salire sul piano inclinato sempre con velocità in modulo pari a v_0 e viene frenata da una forza d'attrito con coefficiente d'attrito dinamico μ_d.

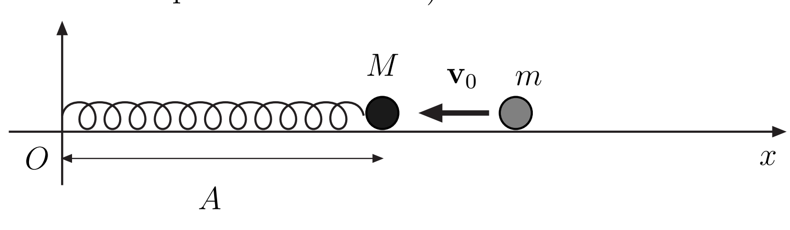


1. Calcolare la velocità v_0.
2. Calcolare la distanza d percorsa da m sul piano inclinato prima di fermarsi all'istante $t = t_1$.
3. Calcolare l'intervallo di tempo $t_1 - t_0$.
4. Calcolare il valore minimo del coefficiente d'attrito statico μ_s per il quale il corpo rimane fermo dopo la salita.

Valori numerici: $\mu_d = 0.3$, $m = 0.5$ kg, $k = 60$ N/m, $L = 10$ cm, $\theta = \pi/6$.

Esercizio 2

Un corpo di massa M è posto su un piano orizzontale liscio ed oscilla intorno al punto O per effetto di una molla, di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla, con ampiezza di oscillazione A. Nell'istante di massima estensione $x(t) = A$ (velocità nulla) arriva un proiettile di massa m e velocità v_0 ed urta, in maniera completamente anelastica, il blocco M, rimanendo attaccato ad M e formando un unico corpo di massa $m+M$. (NB.: nell'urto istantaneo la posizione del corpo M non cambia.)



1. Si calcoli la velocità v_1 del corpo $m + M$ subito dopo l'urto.
2. Si calcoli la nuova ampiezza di oscillazione del corpo $m + M$.

Valori numerici: $A = 20$ cm, $M = 0.5$ kg, $m = 0.1$ kg, $k = 450$ N/m, $v_0 = 18$ m/s.

1 Soluzione Esercizio 1

1. Il corpo di massa m ha inizialmente energia potenziale pari a

$$V_0 = \frac{1}{2}kL^2\,. \tag{1}$$

Quando il blocco viene rimosso, l'energia V_0 viene trasformata in energia cinetica. Al momento del distacco della massa m dal supporto, m ha velocità massima, l'energia potenziale è nulla e quindi si ha solamente energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}mv_0^2\,, \tag{2}$$

da cui

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}L = 1.1 \text{ m s}^{-1}\,. \tag{3}$$

2. Quando m comincia a salire sul piano inclinato ha energia cinetica iniziale

$$T_i = \frac{1}{2}mv_0^2\,. \tag{4}$$

Percorsa la distanza d il corpo si ferma. Quindi l'energia cinetica finale è

$$T_f = 0\,. \tag{5}$$

Utilizziamo il teorema delle forze vive: il lavoro L delle forze agenti sul corpo sarà dato dalla differenza di energia cinetica

$$L = T_f - T_i = -\frac{1}{2}mv_0^2\,. \tag{6}$$

D'altra parte, le forze che agiscono sul corpo sono la forza peso, che è conservativa, e la forza d'attrito. Il lavoro fatto da queste forze è facilmente calcolabile come segue:

$$L = V_i - V_f + \int_0^d \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{r}\,. \tag{7}$$

Poniamo lo zero dell'energia potenziale sul piano orizzontale. L'energia potenziale iniziale, V_i è allora nulla. L'energia potenziale finale è data da

$$V_f = mgh = mgd\sin\theta\,. \tag{8}$$

Per calcolare l'integrale del lavoro fatto dalla forza d'attrito, dobbiamo considerare che

$$F_t = \mu_d N\,, \tag{9}$$

dove N è il modulo della reazione normale del vincolo. Questa è data dalla componente perpendicolare al vincolo della forza peso agente sul corpo:

$$N = mg\cos\theta\,. \tag{10}$$

Allora:

$$\int_0^d \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{r} = -\mu_d mg\cos\theta \int_0^d d\xi = -\mu_d mgd\cos\theta\,. \tag{11}$$

Uguagliando le equazioni (6) e (7), tenendo conto delle (8) e (11), si ha

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -mgd\sin\theta - \mu_d mgd\cos\theta = -mgd(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)\,, \tag{12}$$

da cui si ricava

$$d = \frac{v_0^2}{2g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)} = 8.1\ \text{cm}\,. \tag{13}$$

3. Il moto di m sul piano inclinato è uniformemente decelerato. Le forze che agiscono sul corpo sono la forza peso e la reazione vincolare, che può essere scomposta in una reazione normale al vincolo e una tangenziale (la forza d'attrito vera e propria). Lungo la direzione perpendicolare al vincolo possiamo imporre l'annullarsi delle forze agenti sul corpo e ottenere

$$N = mg\cos\theta\,. \tag{14}$$

Lungo la direzione tangente al piano inclinato si ha

$$m\ddot{x} = -mu_d mg\cos\theta - mg\sin\theta = -mg(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)\,, \tag{15}$$

da cui

$$\ddot{x} = -g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta) = -a = -7.45\ \text{m s}^{-2}\,. \tag{16}$$

Quindi il tempo impiegato per fermarsi in d è dato da

$$\dot{x} = v_0 - at_1 = 0\,, \tag{17}$$

ovvero

$$t_1 = \frac{v_0}{a} = 0.15\ \text{s}\,. \tag{18}$$

4. Quando il corpo si ferma, affinché rimanga fermo per effetto dell'attrito si deve avere che la risultante lungo la direzione del piano inclinato sia nulla, ovvero che

$$F_t = mg\sin\theta\,, \tag{19}$$

quando lungo la direzione perpendicolare si ha

$$N = mg\cos\theta\,. \tag{20}$$

Siccome il modulo della forza d'attrito è legata alla componente normale della reazione vincolare dalla relazione

$$F_t \leq \mu_s N\,, \tag{21}$$

si ha

$$F_t \leq \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta\,. \tag{22}$$

Si trova quindi che il coefficiente d'attrito statico deve soddisfare la seguente diseguaglianza

$$mg\sin\theta \leq \mu_s mg\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad \mu_s \geq \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.58\,, \tag{23}$$

cioè deve essere maggiore di $1/\sqrt{3}$, che è il valore minimo affinché si possa avere equilibrio. Se μ_d fosse minore di tale valore, non si potrebbe avere equilibrio e il corpo arrivato a d tornerebbe indietro scivolando sul piano inclinato.

2 Soluzione Esercizio 2

Si può dividere il moto del sistema in due parti: l'urto, che dà le condizioni iniziali del moto successivo, e il moto dopo l'urto che non è altro che un moto aromico di una massa composta $m + M$.

1. Durante l'urto dobbiamo considerare il fatto che la forza elastica cui è sottoposta la massa M non è impulsiva. Le altre due forze che agiscono sui corpi, la forza peso e la reazione vincolare normale al vincolo, non intervengono durante l'urto, che si svolge lungo le x. Quindi possiamo considerare la conservazione della quantità di moto lungo le x. L'energia invece non si conserva, esserdo l'urto totalmente anelastico.

   Si ha allora che la quantità di moto del sistema subito prima dell'urto sarà la stessa del sistema subito dopo l'urto. Prendendo le x positive verso destra, abbiamo

   $$-mv_0 = -(m+M)v_1\,, \tag{24}$$

   da cui si ricava la velocità di $(m + M)$ subito dopo l'urto:

   $$v_1 = \frac{m}{m+M}v_0 = 3.0\ \mathrm{m\,s^{-1}}\,. \tag{25}$$

2. Subito dopo l'urto, abbiamo quindi un moto armonico di una massa $m+M$ che parte da $x(0) = A$ con velocità iniziale in modulo pari a $v_1 = 3$ m/s (verso negativo).

   Per trovare la nuova ampiezza di oscillazione basta considerare la conservazione dell'energia meccanica, che adesso vale. Possiamo calcolare l'energia meccanica proprio all'istante $t = 0$, in cui l'energia cinetica del sistema è data da

   $$T = \frac{1}{2}(m+M)v_1^2\,, \tag{26}$$

   mentre l'energia potenziale è data da

   $$V = \frac{1}{2}kA^2\,. \tag{27}$$

   La nuova ampiezza di oscillazione A' sarà tale che quando il sistema arriva a $x = A'$ la velocità è nulla e l'energia meccanica è tutta energia potenziale

   $$V = \frac{1}{2}kA'^2\,. \tag{28}$$

Uguagliando l'energia in $t = 0$ e quella all'elongazione massima si ottiene un'espressione per A':

$$\frac{1}{2}(m+M)v_1^2 + \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kA'^2\,, \tag{29}$$

ovvero

$$A' = \pm\sqrt{A^2 + \frac{(m+M)}{k}v_1^2}\,, \tag{30}$$

con

$$\sqrt{A^2 + \frac{(m+M)}{k}v_1^2} = \sqrt{A^2 + \frac{v_1^2}{\omega'^2}} = 22.8\ \text{cm}\,. \tag{31}$$