Esonero 16 Gennaio 2019

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

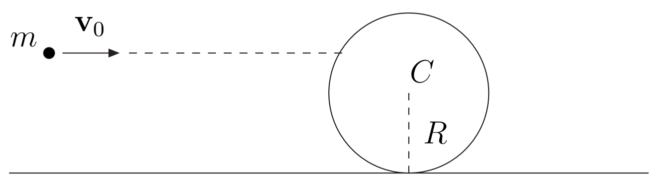
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Anno Accademico 2018-2019

Esonero 16 Gennaio 2019 – (R. Bonciani P. Dore)

Esercizio 1

Un proiettile di massa incognita m e velocità $v_0 = 100$ m/s sparato orizzontalmente ad un'altezza da terra pari a 4/3 R, colpisce e si conficca in un disco omogeneo di massa $M = 2000m$ e raggio $R = 1$ m inizialmente fermo appoggiato su un pavimento liscio (senza attrito).



1. Trovare la velocità v_C del centro di massa del disco dopo essere stato colpito.
2. Calcolare il tempo T impiegato dal sistema a compiere una rotazione completa attorno al proprio asse e quindi il tratto s percorso sul pavimento dal centro C del disco in tale intervallo di tempo.
3. Se il proiettile urta elasticamente il disco ad una quota R da terra, qual'è il tratto s_1 percorso da C nel tempo T?

Siccome $\frac{m}{M} = \frac{1}{2000} \ll 1$, nelle domande 1. e 2. SI TRASCURI m RISPETTO AD M nelle quantità che riguardano il sistema subito dopo l'urto.

Esercizio 2

Una mole di gas perfetto biatomico inizialmente in uno stato A con $V_A = 4 \cdot 10^{-3}$ m^3 e $p_A = 6 \cdot 10^5$ Pa, effettua una prima trasformazione reversibile isoterma che lo porta allo stato B, con pressione pari a $p_B = 2p_A$, seguita da una adiabatica reversibile con cui raggiunge lo stato finale C, con volume $V_C = 10^{-3}$ m^3.

1. Disegnare le trasformazioni del gas nel piano di Clapeyron.
2. Determinare il calore scambiato, il lavoro (fatto o subito) e la variazione di energia interna del gas in queste trasformazioni.
3. Determinare la variazione di entropia del gas e dell'ambiente in queste trasformazioni.

Soluzione Esercizio 1

1. Siccome non ci sono reazioni vincolari impulsive orizzontali, prendendo un SdR cartesiano con l'asse delle x lungo la linea del pavimento e verso positivo verso destra, possiamo utilizzare la conservazione della quantità di moto lungo le x. Inoltre ricordiamo che possiamo trascurare m rispetto ad M. Quindi

$$mv_0 = Mv_C\,, \tag{1}$$

dove v_C è la velocità del centro del disco, che siccome trascuriamo m è anche la velocità del centro di massa del sistema dopo l'urto, e

$$v_C = \frac{m}{M}v_0 = 0.05 \text{ m/s}\,. \tag{2}$$

2. Dopo l'impatto, il sistema disco+proiettile si muove con velocità del centro C data dalla (2) e, inoltre, ruota intorno a C con una certa velocità angolare ω. Siccome non c'è attrito, il momento angolare rispetto a C si conserva anche dopo l'urto. Il momento della forza peso e della reazione vincolare normale sono nulli rispetto a C. Quindi possiamo scrivere che

$$mv_0\frac{R}{3} = I_C\omega\,, \tag{3}$$

dove

$$I_C = \frac{1}{2}MR^2\,. \tag{4}$$

Troviamo quindi

$$\omega = \frac{mv_0R}{3I_C} = \frac{2v_0}{3R}\frac{m}{M} = 0.033 \text{ s}^{-1}\,. \tag{5}$$

Il moto di rotazione e quello di traslazione sono indipendenti, visto che non c'è attrito fra disco e pavimento. Per trovare quindi il tratto percorso da C dopo una rotazione completa del disco attorno al proprio asse, basta trovare il periodo di tale rotazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\,\frac{3R}{2v_0}\frac{M}{m} = 188.5 \text{ s} \tag{6}$$

e moltiplicarlo per la velocità del punto C:

$$s = v_CT = 2\pi\,\frac{3R}{2v_0}\frac{M}{m}\frac{m}{M}v_0 = 3\pi R = 9.4 \text{ m} \tag{7}$$

3. Siccome l'urto adesso è elastico, oltre alla conservazione della quantità di moto lungo l'asse delle x dobbiamo anche considerare la conservazione dell'energia cinetica. Indicando con v_1 la velocità del proiettile subito dopo l'urto, si ha quindi:

$$mv_0 = Mv_C + mv_1\,, \tag{8}$$
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2\,. \tag{9}$$

Come terza equazione per determinare le tre incognite in gioco (v_C, v_1 e ω) possiamo considerare la seconda cardinale impulsiva con polo nel punto C. Rispetto a questo punto l'integrale del momento risultante delle forze esterne che agiscono sul sistema è nullo durante l'urto. Infatti le uniche forze impulsive che agiscono (quelle di contatto fra proiettile e disco) sono dirette lungo la congiungente $C-m$. Inoltre v_C è parallela alla velocità del centro di massa del sistema. Quindi, integrando in dt, si ha

$$0 = \int \dot{L}_C dt \; = \; I_C \omega \, . \tag{10}$$

Essendo $I_C \neq 0$ si ha $\omega = 0$.

Allora le (8,9) si riducono a

$$\begin{aligned} m v_0 &= M v_C + m v_1 \, , & (11) \\ m v_0^2 &= m v_1^2 + M v_C^2 \, , & (12) \end{aligned}$$

che ha come soluzione

$$\begin{aligned} v_C &= 2 \, \frac{m v_0}{M+m} = 0.09995 \text{ m/s} \, , & (13) \\ v_1 &= -v_0 + 2 \, \frac{m v_0}{M+m} = -99.9 \text{ m/s} \, . & (14) \end{aligned}$$

Quindi, in T il centro C percorre

$$s_1 = v_C T = 2 \, \frac{m v_0}{M+m} \, 2\pi \, \frac{3R}{2v_0} \frac{M}{m} = 6\pi R \frac{1}{1+\frac{m}{M}} = 18.8 \text{ m} \, . \tag{15}$$

Soluzione Esercizio 2

1. Diagramma pV.

2. Viene scambiato calore fra gas e ambiente soltanto nella compressione isoterma, la seconda trasformazione essendo adiabatica. Lungo la trasformazione AB si ha $dU = 0$ e quindi

$$đQ = đL = p \, dV \, . \tag{16}$$

Quindi

$$Q_{AB} = \int_A^B p \, dV = R T_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -R T_A \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) = -R T_A \ln 2 = -1663.55 \text{ J} \, , \tag{17}$$

dove abbiamo posto

$$\begin{aligned} T_A &= \frac{p_A V_A}{R} = 288.67 \text{ K} \, , & (18) \\ V_B &= \frac{R T_B}{p_B} = \frac{R T_A}{2 p_A} = \frac{V_A}{2} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \, . & (19) \end{aligned}$$

Quindi il gas durante la compressione isoterma cede calore all'ambiente.

Il lavoro subito dal gas è pari a

$$L_{AB} = Q_{AB} = -1663.55 \text{ J} . \tag{20}$$

Lungo la trasformazione BC, invece, si avrà

$$\begin{aligned} L_{BC} &= \int_B^C p\, dV = p_B V_B^\gamma \int_B^C \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{p_B V_B^\gamma}{1-\gamma}\left(V_C^{1-\gamma} - V_B^{1-\gamma}\right) = \frac{p_B V_B}{1-\gamma}\left[\left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} - 1\right] \\ &= \frac{RT_B}{1-\gamma}\left(2^{\gamma-1} - 1\right) = -1917.05 \text{ J} , \end{aligned} \tag{21}$$

dove per un gas biatomico $\gamma = \tilde{c}_p/\tilde{c}_V = 7/5$.

Per quanto riguarda l'energia interna, si ha in generale

$$dU = \tilde{c}_V\, dT , \tag{22}$$

e inoltre

$$T_A = 288.67 \text{ K} , \quad T_B = T_A , \quad T_C = \frac{T_B V_B^{\gamma-1}}{V_C^{\gamma-1}} = 380.9 \text{ K} . \tag{23}$$

Allora

$$\Delta U_{AB} = 0 , \quad \Delta U_{BC} = \tilde{c}_V (T_C - T_B) = \frac{5}{2} R (T_C - T_B) = 1917.05 \text{ J} . \tag{24}$$

3. Per quanto riguarda l'entropia, si ha una variazione solo lungo l'isoterma, essendo l'adiabatica una isoentropica. Si avrà

$$\Delta S_{AB}^{gas} = \int_A^B \frac{đQ^{rev}}{T} = R \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -R\ln 2 = -5.76 \text{ J/K} . \tag{25}$$

Siccome la trasformazione è reversibile, $\Delta S^{universo} = 0$. Quindi l'ambiente avrà una variazione di entropia pari a

$$\Delta S_{AB}^{amb} = -\Delta S_{AB}^{gas} = R \ln 2 = 5.76 \text{ J/K} . \tag{26}$$

Infatti l'ambiente è costituito dalla sorgente a $T = T_A$ con la quale il gas è in contatto termico durante tutta la trasformazione AB. Siccome il gas cede $|Q_{AB}|$ alla sorgente, la sorgente acquista $|Q_{AB}|$ e la sua temperatura non varia, quindi

$$\Delta S_{AB}^{amb} = \Delta S_{AB}^{sorgente} = \frac{1}{T_A} \int_A^B đQ^{rev} = \frac{|Q_{AB}|}{T_A} = 5.76 \text{ J/K} . \tag{27}$$