Esonero 17 Novembre 2017

Roberto Bonciani e Paolo Dore

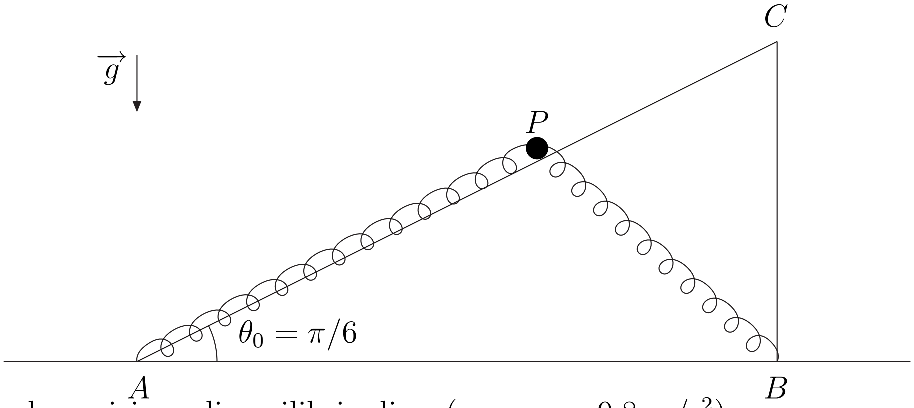
Corso di Fisica Generale 1

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Anno Accademico 2017-2018

Esercizio 1

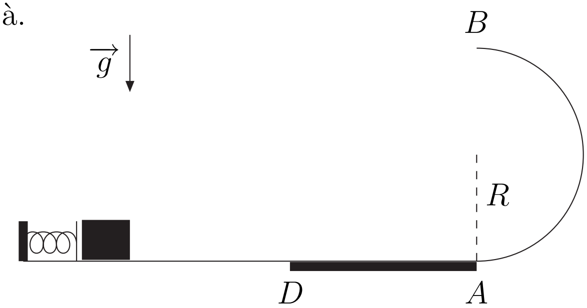
Un punto materiale P di massa $m = 1$ kg è appoggiato su un piano liscio, inclinato sull'orizzontale di un'angolo $\theta_0 = \pi/6$. Il piano inclinato forma un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa pari ad $\overline{AC} = l = 1$ m. Il punto materiale è collegato a B e ad A tramite due molle ideali di costante elastica $k = 19.6$ N/m e lunghezza di riposo nulla.



1. Trovare la posizione di equilibrio di m (usare $g = 9.8$ m/s^2).
2. Scrivere e risolvere l'equazione del moto, supponendo che il punto materiale venga lasciato da fermo in A.

Esercizio 2

Un carrello di massa $m = 100$ g è appoggiato ad una piattaforma collegata al muro da una molla ideale di costante elastica $k = 100$ N/m. Il carrello è vincolato a scorrere (senza potersene distaccare, neanche nel tratto AB) su un binario orizzontale che termina con un tratto semicircolare di raggio $R = 80$ cm liscio, posto in un piano verticale. Il moto si svolge in presenza di gravità.



Inizialmente la molla è contratta di Δx e il tutto viene tenuto fermo da un opportuno gancio. Ad un certo istante il gancio viene rimosso e il carrello comincia a percorrere il tratto orizzontale del binario. Prima di arrivare in A, il carrello incontra un tratto lungo $DA = L = 1$ m di binario in cui agisce un attrito radente, con coefficiente $\mu_d = 0.4$. Il carrello inizia poi a percorrere il tratto semicircolare del binario, che è liscio.

1. Determinare il Δx_{min} minimo affinché il carrello arrivi in B con velocità non nulla.
2. Supponendo $\Delta x > \Delta x_{min}$, il carrello uscendo dalla guida in B cadrà sul binario in un punto C. Determinare la distanza AC in funzione di Δx.

1 Soluzione Esercizio 1

Per trovare la posizione di equilibrio minimizziamo l'energia potenziale.

Detta x la coordinata del punto P lungo il segmento AB, avendo posto l'origine coincidente con A, si ha

$$\begin{aligned} \overline{AP}^2 &= x^2\,, && (1)\\ \overline{BP}^2 &= [(l-x)\cos\theta_0]^2 + [x\sin\theta_0]^2 = l^2\cos^2\theta_0 - 2lx\cos\theta_0 + x^2\,. && (2) \end{aligned}$$

L'energia potenziale sarà data dalla somma delle energie potenziali delle due molle e della forza di gravità:

$$\begin{aligned} V &= mgx\sin\theta_0 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\left[l^2\cos^2\theta_0 - 2lx\cos^2\theta_0 + x^2\right]\,, && (3)\\ &= kx^2 + \left(mg\sin\theta_0 - kl\cos^2\theta_0\right)x + \frac{1}{2}kl^2\cos^2\theta_0\,. && (4) \end{aligned}$$

dove abbiamo posto lo zero dell'energia potenziale di gravità al suolo e quello dell'energia potenziale elastica rispettivamente sui due punti di equilibrio delle molle.

Allora

$$\frac{dV}{dx} = 2kx + \left(mg\sin\theta_0 - kl\cos^2\theta_0\right) = 0\,, \tag{5}$$

che dà come soluzione

$$x_{eq} = \frac{1}{2k}\left(kl\cos^2\theta_0 - mg\sin\theta_0\right) = \frac{3}{8}l - \frac{mg}{4k} = 0.25\ \text{m}\,. \tag{6}$$

Per vedere se il punto è di equilibrio stabile oppure no, facciamo la derivata seconda:

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_{eq}} = 2k > 0\,, \tag{7}$$

quindi il punto è di equilibrio stabile.

Si può trovare il punto di equilibrio anche usando la prima cardinale della statica.

Per trovare l'equazione del moto, mettiamoci in un sistema di riferimento in cui l'asse delle x coincide col segmento AC, con origine in A e verso positivo da A a C e l'asse delle y di conseguenza, con verso positivo verso l'alto.

Lungo le y l'accelerazione è nulla e otteniamo il comportamento della reazione vincolare

$$N = mg\cos\theta_0 + kl\cos\theta_0\sin\theta_0\,. \tag{8}$$

Lungo le x invece abbiamo

$$m\ddot{x} = -kx - mg\sin\theta_0 + k\left(l\cos^2\theta_0 - x\right) = -2kx - mg\sin\theta_0 + kl\cos^2\theta_0\,, \tag{9}$$

ovvero

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x + g\sin\theta_0 - \frac{kl}{m}\cos^2\theta_0 = 0\,, \tag{10}$$

o anche

$$\ddot{x} + 2\frac{k}{m}(x - x_{eq}) = 0\,. \tag{11}$$

Il moto è un moto armonico con pulsazione

$$\omega = \sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\,, \tag{12}$$

intorno al punto $x = x_{eq}$ con ampiezza data dalle condizioni iniziali.

$$x(t) = x_{eq} + A\cos(\omega t + \phi)\,, \tag{13}$$

con A e ϕ tali che:

$$x_{eq} + A\cos\phi = 0\,, \tag{14}$$

$$-A\omega\sin\phi = 0\,, \tag{15}$$

che dà

$$\phi = 0\,, \tag{16}$$

$$A = -x_{eq}\,. \tag{17}$$

Infine la soluzione è

$$x(t) = x_{eq}(1 - \cos(\omega t))\,. \tag{18}$$

2 Soluzione Esercizio 2

Il carrello m viene sparato dalla molla con velocità v tale che valga la conservazione dell'energia meccanica

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}k\Delta x^2\,, \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x\,. \tag{19}$$

ovvero

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x\,. \tag{20}$$

Attraversando il tratto $DA = L$ perde energia e quindi riduce la sua velocità, fino al valore v_1 con cui impegna la parte semicircolare del binario. Per il teorema delle forze vive si ha

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_D^A \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{r} = -\mu_d mgL\,, \tag{21}$$

per cui

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu_d L} = \sqrt{\frac{k}{m}\Delta x^2 - 2\mu_d gL}\,. \tag{22}$$

Indichiamo con θ l'angolo che la massa m fa con la verticale mentre risale la parte circolare del binario. La velocità sarà funzione di θ e si otterrà sempre utilizzando la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1 - \cos\theta)\,, \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{v_1^2 - 2gR(1 - \cos\theta)}\,. \tag{23}$$

Quindi affinché il carrello arivi in B con velocità non nulla si deve avere

$$v|_{\theta=\pi} = \sqrt{v_1^2 - 4gR} > 0\,, \tag{24}$$

cioè

$$v_1^2 = \frac{k}{m}\Delta x^2 - 2\mu_d g L > 4gL\,. \tag{25}$$

La (25) porta alla seguente relazione su Δx:

$$\Delta x > \sqrt{\frac{mg}{k}(4R + 2\mu_d L)} = \Delta x_{min} = 19.8 \text{ cm}\,. \tag{26}$$

Se $\Delta x > \Delta x_{min}$, il carrello esce dal binario in B, di coordinate $x_B = 0$, $y_B = 2R$, con velovità pari in modulo a

$$v_B = \sqrt{v_1^2 - 4gR} = \sqrt{\frac{k}{m}\Delta x^2 - 2\mu_d g L - 4gR}\,, \tag{27}$$

diretta lungo le x negative:

$$\mathbf{v}_B = -\left(\sqrt{v_1^2 - 4gR}\right)\hat{\imath}\,. \tag{28}$$

La distanza AC dal centro del SdR al punto di caduta sul binario orizzontale è

$$\overline{AC} = v_B t_{caduta} = v_B\sqrt{\frac{4R}{g}} = 2\sqrt{\frac{kR}{mg}\Delta x^2 - 2\mu_d LR - 4R^2}\,. \tag{29}$$