Esonero 19 Gennaio 2018

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2017-2018

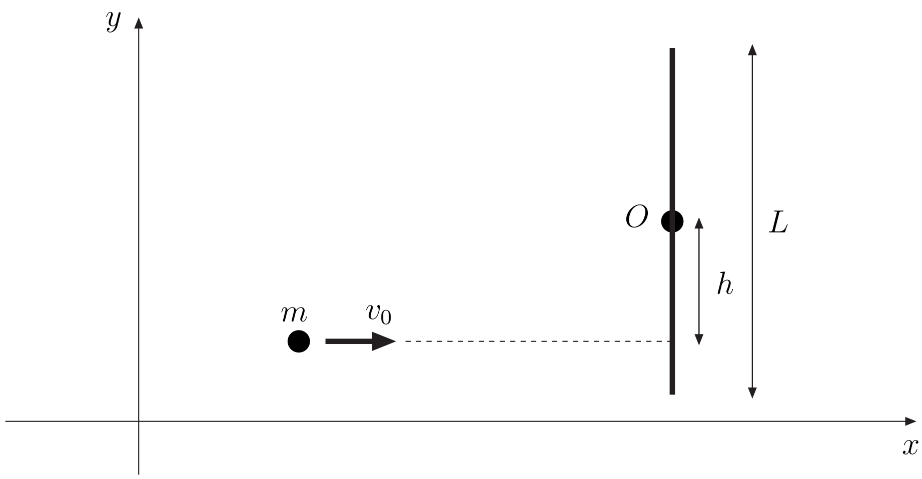
Secondo Esonero di Fisica Generale 1 per Matematici

R. Bonciani, P. Dore

19 Gennaio 2018

Esercizio 1

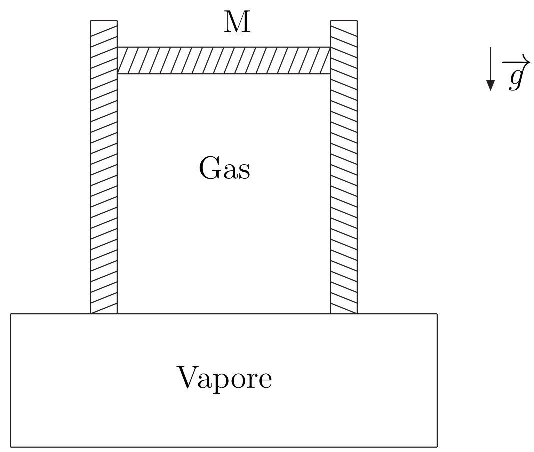
Una sbarretta omogenea di massa $m = 3.0$ kg e lunghezza $L = 60$ cm si trova su un piano orizzontale xy liscio ed è fissata a questo tramite un perno conficcato nel suo centro di massa O. La sbarretta, inizialmente ferma, viene colpita ad una distanza $h = L/3$ dal suo centro di massa, in direzione ortigonale alla sbarretta stessa, da un proiettile di massa $m_p = m/4$ che urta la sbarretta a velocità $v_0 = 2.0$ m/s.



1. L'urto fra proiettile e sbarretta è completamente anelastico e il proiettile si conficca nella sbarretta. In questa situazione, si determini:
   - a la velocità angolare del sistema sbarretta+proiettile subito dopo l'urto;
   - b l'angolo spazzato dal sistema sbarretta+proiettile prima di fermarsi, sapendo che il perno agisce sulla sbarretta con un attrito che si può schematizzare con un momento costante $M = 1.2$ Nm che si oppone al moto del sistema.
2. L'urto fra proiettile e sbarretta è elastico. In questa situazione si determini:
   - a La velocità del proiettile e la velocità angolare della sbarra subito dopo l'urto;
   - b l'angolo spazzato dalla sbarretta prima di fermarsi, sapendo che il perno agisce comunque con l'attrito descritto al punto precedente.

Esercizio 2

Una mole di gas perfetto è contenuta in un cilindro, messo in verticale, a pareti laterali adiabatiche e base conduttrice. Il cilindro è chiuso da un pistone adiabatico di massa $M = 325.8$ kg, libero di scorrere senza attrito. Il sistema gas+cilindro+pistone si trova in un ambiente con pressione esterna trascurabile ed è sottoposto all'azione della forza di gravità (si consideri $g = 9.81$ m s^{-2}). Inizialmente il sistema è in equilibrio alla temperatura $T_i = 22$ °C. La base conduttrice del cilindro viene messa in contatto termico con un recipiente contenente vapore acqueo a $T = 100$ °C, che può scambiare calore solo col cilindro. Tutto il sistema, gas+cilindro+recipiente (che quindi risulta termicamente isolato) si porta molto rapidamente ad una nuova condizione di equilibrio alla temperatura finale $T_f = 100$ °C (si trascuri comunque la capacità termica del cilindro). Al termine della trasformazione (irreversibile), il pistone si è alzato di $h = 20$ cm e nel recipiente una massa di vapore $m = 1$ g è passata dalla fase gassosa alla fase liquida (acqua).



Sapendo che il calore latente di evaporazione del l'acqua è $\lambda = 540$ cal/g si calcoli:

1. il calore Q scambiato nella trasformazione;
2. il calore specifico molare del gas e si determini di conseguenza la natura dello stesso (se monoatomico o biatomico);

1 Soluzione Esercizio 1

1. Essendo l'urto anelastico su un sistema vincolato, in generale non si conserva nessuna quantità. Però, la reazione vincolare impulsiva per forza di cose è concentrata sul perno O. Quindi, calcolando i momenti rispetto ad O, avremo che, integrando la seconda Cardinale
$$\int \tau_O \, dt = 0 = \int \dot{L}_O \, dt = L_O^f - L_O^i \,, \tag{1}$$
dove τ_O è il momento delle forze esterne che agiscono sul sistema rispetto ad O, L_O^i è il momento della quantità di moto iniziale rispetto ad O e L_O^f è il momento finale. Quindi
$$L_O^f = L_O^i \,. \tag{2}$$
Abbiamo
$$L_O^i = m_p v_0 h \tag{3}$$
$$L_O^f = I_O^{tot} \omega = (I_{O,sbarr} + I_{O,proiet})\omega = \left(\frac{mL^2}{12} + \frac{m}{4}\frac{L^2}{9}\right)\omega = \frac{1}{9} mL^2 \omega \,, \tag{4}$$
dove abbiamo preso come verso positivo della rotazione quello antiorario. Si ricava così
$$\omega = 9 \frac{m_p}{m} \frac{v_0 h}{L^2} = \frac{3}{4} \frac{v_0}{L} = 2.5 \text{ s}^{-1} \,. \tag{5}$$
Utilizzando il teorema delle forze vive, si trova che il lavoro L_{if} fatto dalla forza d'attrito per fermare la sbarreta col proiettile è dato dalla differenza di energia cinetica del sistema fra lo stato finale e iniziale:
$$L_{if} = T_f - T_i = -T_i = -\frac{1}{2} I_O^{tot} \omega^2 = -\frac{1}{18} mL^2 \omega^2 = -\frac{1}{32} m v_0^2 \,. \tag{6}$$
D'altra parte, essendo il momento applicato sul sistema costante, si ha
$$L_{if} = -\int_0^\theta M \, d\theta' = -M \int_0^\theta d\theta' = -M \, \theta \,. \tag{7}$$
Infine
$$\theta = \frac{1}{32} \frac{m v_0^2}{M} = 0.31 \text{ rad} \,. \tag{8}$$

2. Consideriamo adesso l'urto elastico. Dopo l'urto il proiettile avrà velocità v_f che può soltanto essere diretta lungo l'asse delle x (come la velocità iniziale). Quindi abbiamo un'incognita in più nel problema. Essendo l'urto elastico, però, abbiamo anche un'equazione aggiuntiva derivante dalla conservazione dell'energia cinetica durante l'urto. Allora possiamo scrivere due equazioni
$$L_O^f = L_O^i \,, \tag{9}$$
$$T_f = T_i \,, \tag{10}$$

dove

$$\begin{aligned}
L_O^i &= m_p v_0 h & (11)\\
L_O^f &= I_{O,sbarr}\omega - m_p v_f = \frac{mL^2}{12}\omega - m_p v_f h\,, & (12)\\
T_i &= \frac{1}{2}m_p v_0^2\,, & (13)\\
T_f &= \frac{1}{2}m_p v_f^2 + \frac{1}{2}I_{O,sbarr}\omega^2\,, & (14)
\end{aligned}$$

e $I_{O,sbarr} = mL^2/12$. In Eq. (12) abbiamo genericamente considerato la velocità finale del proiettile diretta verso le x negative (nel nostro SdR, $\mathbf{v}_f = -v_f\hat{\imath}$). Ciò verrà confermato o meno dalla soluzione del sistema (a seconda che v_f venga positivo o negativo). Allora

$$\begin{aligned}
m_p v_0 h &= \frac{mL^2}{12}\omega - m_p v_f h\,, & (15)\\
\frac{1}{2}m_p v_0^2 &= \frac{1}{2}m_p v_f^2 + \frac{1}{24}mL^2\omega^2\,. & (16)
\end{aligned}$$

Dalla prima equazione si ottiene

$$\omega = 12\frac{m_p h}{mL^2}(v_f + v_0) = \frac{1}{L}(v_f + v_0)\,. \tag{17}$$

Sostituendo nella seconda si ha

$$3(v_0^2 - v_f^2) = (v_0 + v_f)^2\,, \tag{18}$$

cioè

$$v_f = \frac{1}{2}v_0 = 1 \text{ m/s}\,. \tag{19}$$

Il proiettile rimbalza e torna indietro con velocità pari a metà della velocità iniziale.

La velocità angolare sarà quindi

$$\omega = \frac{3}{2}\frac{v_0}{L} = 5.0 \text{ s}^{-1}\,, \tag{20}$$

doppia rispetto alla ω dell'urto anelastico.

Usando il teorema delle forze vive si ottiene

$$\theta = \frac{I_{O,sbarr}}{2M}\omega^2 = \frac{3}{32}\frac{mv_0^2}{M} = 0.93 \text{ rad}\,. \tag{21}$$

2 Soluzione Esercizio 2

1. Il gas, che passa dallo stato i allo stato f, assorbe una certa quantità di calore e si espande. La stessa quantità di calore assorbita è stata ceduta dalla sorgente, costituita dal vapore acqueo che in corrispondenza di questa cessione di calore subisce una trasformazione di fase: una massa m di vapore condensa e la temperatura rimane costante. Nella condensazione, la sorgente cede quindi la quantità di calore

$$\|Q_{ced}\| = \lambda m = 540 \text{ cal} = 2260.44 \text{ J}\,. \tag{22}$$

2. Per trovare il calore specifico molare del gas, consideriamo il fatto che, indipendentemente dalla pressione del gas, il lavoro che fa è contro la pressione costante derivante dal cilindro soggetto alla forza di gravità. Quindi

$$L_{gas} = -L_{grav} = \int_0^h Mg\,dy = Mgh\,. \tag{23}$$

Per il Primo Principio si ha

$$đQ = \tilde{c}_V dT + đL\,, \tag{24}$$

dove $\tilde{c}_V$ è il calore specifico molare a volume costante del gas, parametro che vogliamo determinare. Integrando la (24), si trova la quantità di calore assorbita dal gas

$$Q_{ass} = \tilde{c}_V(T_f - T_i) + \int đL = \tilde{c}_V(T_f - T_i) + Mgh\,, \tag{25}$$

dove abbiamo $Q_{ass} = \|Q_{ced}\|$. Allora, dalla (25) possiamo determinare $\tilde{c}_V$

$$\tilde{c}_V = \frac{\|Q_{ced}\| - Mgh}{(T_f - T_i)} = 20.7849 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \simeq 2.5\ R = \frac{5}{2}\ R\,. \tag{26}$$

Dalla relazione trovata se ne deduce che il gas in questione è biatomico.