Esonero 20 Gennaio 2016

Roberto Bonciani e Paolo Dore

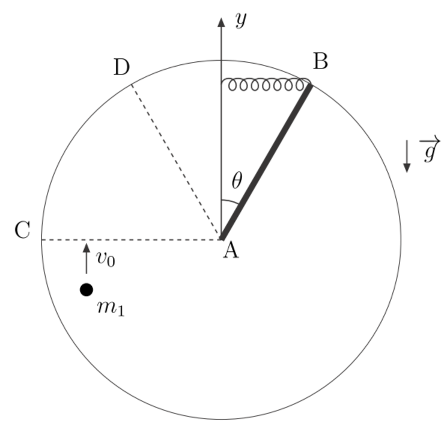
Corso di Fisica Generale 1
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2015-2016

Esonero 2 - Fisica Generale I per matematici
20 Gennaio 2015

R. Bonciani, P. Dore

Il presente esonero NON sarà considerato superato se il punteggio di 15/30 sarà raggiunto con i soli esercizi di meccanica o con i soli esercizi di termodinamica. È obbligatorio affrontare entrambe le parti.

Esercizio 1



Un'asta omogenea di massa m e lunghezza $2l$ è incernierata al suo estremo A ed è vincolata a muoversi su un piano verticale, come mostrato in figura. L'altro estremo, B, è collegato all'asta verticale fissa Ay (asse delle y) tramite una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla. Sia θ l'angolo che l'asta forma con l'asse y.

1. Determinare k affinché $\theta_0 = \pi/6$ sia posizione di equilibrio. *(4 punti)*

2. Al tempo $t = 0$ la molla viene recisa in B e l'asta si trova soggetta alla forza di gravità e ad un momento frenante costante di modulo τ che agisce sulla cerniera in A. Determinare τ sapendo che l'asta arriva alla posizione orizzontale $\theta_1 = \frac{3}{2}\pi$ (punto C) con velocità nulla. *(5 punti)*

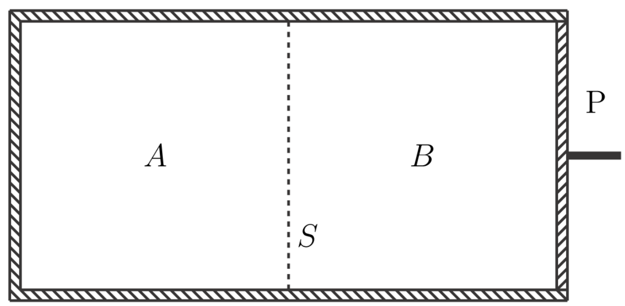
3. Nell'istante in cui l'asta raggiunge con velocità nulla la posizione orizzontale, viene urtata in maniera totalmente anelastica da un proiettile di massa m_1 che giunge dal basso e arriva sulla sbarretta con velocità $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{j}$. L'urto avviene a distanza $\frac{3}{2}l$ da A. Determinare v_0 affinché la sbarretta (che è sempre soggetta anche a τ, il cui valore è stato trovato nella domanda precedente) col proiettile attaccato arrivi in posizione $\theta_2 = \frac{11}{6}\pi$, cioè in posizione simmetrica rispetto a quella da cui è partita al tempo $t = 0$ (punto D). *(6 punti)*

Valori numerici: $m = 240$ g; $l = 80$ cm; $m_1 = 20$ g.

Esercizio 2

Una macchina di Carnot ideale $\mathcal{C}$ lavora fra una sorgente calda a $T_c = 400\,\mathrm{K}$ e una sorgente fredda a $T_f = 300\,\mathrm{K}$. La sorgente fredda è costituita da un sistema termodinamico $\mathcal{X}$ con capacità termica molto grande, in maniera tale che qualunque sia la quantità di calore scambiata da $\mathcal{X}$ la sua temperatura non vari apprezzabilmente e rimanga sempre pari a T_f. Sapendo che dopo un ciclo della macchina $\mathcal{C}$ il sistema $\mathcal{X}$ ha variato la propria entropia di $\Delta S = 5\,\mathrm{J/K}$, calcolare la quantità di calore che $\mathcal{C}$ assorbe dalla sorgente calda. *(5 punti)*

Esercizio 3



Un cilindro a pareti isolanti di volume V_0 è chiuso alla sua estremità da un pistone anch'esso isolante. Inizialmente, il volume V_0 è diviso da un setto rigido S in due parti uguali, A e B. La parte A contiene una mole di gas perfetto monoatomico alla temperatura di $T_A = 27\,°\mathrm{C}$ (e volume $V_A = V_0/2$). La parte B, anch'essa di volume $V_B = V_0/2$, è vuota. Ad un certo istante il setto S viene rimosso e il gas inizialmente racchiuso nella parte A compie un'espansione libera, occupando l'intero volume $V_A + V_B = V_0$. Successivamente, il gas viene compresso dal pistone P in maniera quasi-statica fino a riportarlo ad occupare il volume $V_A = V_0/2$. Disegnare le due trasformazioni nel piano di Clapeyron e determinare le corrispondenti variazioni di energia interna ΔU e di entropia ΔS. *(5 punti)*

Esercizio 4

Una mole di gas perfetto monoatomico è in equilibrio nello stato A, con $T_A = 300\,\mathrm{K}$ e $V_A = 5$ l. Compiendo il lavoro $L_0 = 1728$ J, si effettua una compressione isoterma reversibile che porta il gas ad occupare il volume V_B. Calcolare la quantità di calore Q_0 che deve essere prelevata a volume costante dal gas per riportare la pressione al valore iniziale. *(5 punti)*

Soluzione Esercizio 1

1. Per trovare la posizione di equilibrio basta applicare la seconda cardinale con centro in A. Si avrà:

$$2l\cos\theta_0\, k(2l)\sin\theta_0 - l\sin\theta_0 mg = 0\,, \tag{1}$$

da cui, per $\theta_0 \neq 0$:

$$k = \frac{mg}{4l\cos\theta_0} = \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{mg}{l} = 0.85 \text{ N/m}. \tag{2}$$

2. Si può utilizzare il teorema delle forze vive. L'energia cinetica dell'asta è nulla a $t = 0$ ed è nuovamente nulla quando l'asta arriva con velocità nulla al punto C. Quindi la forza peso e l'attrito in A fanno lavoro tale che:

$$0 = L_{BC} = V(B) - V(C) - \int_B^C \tau d\theta = mgl\cos\theta_0 - \tau(\theta_1 - \theta_0)\,, \tag{3}$$

da cui

$$\tau = \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}mgl = 0.39 \text{ N}\cdot\text{m}. \tag{4}$$

3. Nell'urto si conserva il momento angolare rispetto ad A. Per cui

$$mv_0\frac{3}{2}l = I_A\omega\,, \tag{5}$$

da cui si ottiene un'espressione per la velocità angolare subito dopo l'urto

$$\omega = \frac{3mv_0 l}{2I_A}\,, \tag{6}$$

dove

$$I_A = \frac{9}{4}m_1 l^2 + \frac{4}{3}ml^2 = 0.23 \text{ kg}\cdot\text{m}^2\,. \tag{7}$$

Utilizzando ancora il teorema delle forze vive si ha:

$$L_{CD} = -\frac{1}{2}I_A\omega^2 \tag{8}$$

D'altra parte si ha anche:

$$L_{CD} = -mgl\cos\theta_2 - m_1 g\frac{3}{2}l\cos\theta_2 - \tau(\theta_2 - \theta_1) = -1.46 \text{ J}\,. \tag{9}$$

Sostituendo la 6 e la 9 nella 8 si ottiene infine:

$$v_0 = \frac{2\sqrt{-2I_A L_{CD}}}{3ml} = 2.8 \text{ m/s}\,. \tag{10}$$

Soluzione Esercizio 2

Se Q_{ced} è la quantità di calore che la macchina $\mathcal{C}$ cede alla sorgente fredda e Q_{ass} è quella che assorbe dalla sorgente calda, si avrà

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{ass}}\,, \tag{11}$$

ovvero

$$Q_{ass} = \frac{|Q_{ced}|}{1-\eta}\,. \tag{12}$$

D'altronde si ha anche

$$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{3}{4} = 0.25 \tag{13}$$

e quindi:

$$Q_{ass} = \frac{4}{3}|Q_{ced}|\,. \tag{14}$$

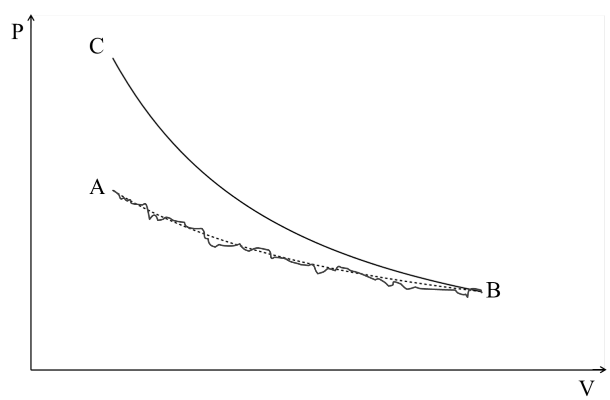
Per determinare $|Q_{ced}|$ utilizziamo l'espressione dell'entropia. Assorbendo $|Q_{ced}|$ il sistema $\mathcal{X}$ aumenta la propria entropia di ΔS, per cui si ha

$$|Q_{ced}| = T_f \Delta S\,. \tag{15}$$

Infine

$$Q_{ass} = \frac{4}{3} T_f \Delta S = 2000\,\mathrm{J}\,. \tag{16}$$

Soluzione Esercizio 3



Nell'espansione libera ($A \to B$) si ha $T_B = T_A$, quindi $\Delta U_{AB} = 0$. Per il calcolo dell'entropia si può utilizzare la corrispondente isoterma reversibile:

$$\Delta S_{AB} = nR \ln \frac{V_B}{V_A} = nR \ln 2 = 5.76\ \mathrm{J/K}\,. \tag{17}$$

La compressione $B \to C$ è un'adiabatica reversibile: $Q_{BC} = 0$, quindi $\Delta S_{BC} = 0$. La variazione di energia interna è data da

$$\Delta U_{BC} = nc_v(T_C - T_B) = nc_v(T_C - T_A) \tag{18}$$

Per calcolare T_C si utilizza la relazione, valida per le trasformazioni adiabatiche,

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \tag{19}$$

Poiché il gas è monoatomico $\gamma = \frac{5}{3}$, inoltre $V_C = V_A$, $T_B = T_A$ e $V_B = 2V_A$, si ottiene quindi

$$T_C = T_A 2^{\frac{2}{3}} = 476 \text{ K} \quad \rightarrow \quad \Delta U_{BC} = n c_v T_A (2^{\frac{2}{3}} - 1) = 2195 \text{ J}\,. \tag{20}$$

Soluzione Esercizio 4

Dall'equazione di stato si ricava la pressione dello stato A:

$$P_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 4.92 \text{ atm}\,. \tag{21}$$

Poiché il lavoro nella trasformazione isoterma è dato da

$$L_B = -L_0 = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} \tag{22}$$

si può ricavare il volume dello stato B:

$$V_B = V_A \exp\left(\frac{-L_0}{nRT_A}\right) = \frac{1}{2} V_A = 2.5 \text{ l}\,. \tag{23}$$

Infine si ricava la temperatura nello stato finale C:

$$T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = \frac{P_A V_B}{nR} = \frac{1}{2}\frac{P_A V_A}{nR} = \frac{1}{2} T_A = 150 \text{ K}\,. \tag{24}$$

Nella trasformazione isocora $L_{BC} = 0$, quindi

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = n c_v (T_C - T_B) = -\frac{1}{2} n c_v T_A \tag{25}$$

Infine

$$Q_0 = -Q_{BC} = \frac{1}{2} n c_v T_A = 1870 \text{J}\,. \tag{26}$$