

Esame 2 Luglio 2019

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica

Dipartimento di Fisica

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Anno Accademico 2018-2019

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
2 Luglio 2019

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.

Esempio “D. Hilbert, 23011862.”

Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (6 pt)

Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(x)}{x^3 + 1} dx. \quad (1)$$

Suggerimento: si consideri la funzione $\log^2(z)/(z^3 + 1)$.

Esercizio 2 (4 pt)

Studiare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{e^{2iz} - 1} \quad (2)$$

e calcolare il seguente integrale

$$\int_{\gamma} f(z) dz, \quad (3)$$

dove $\gamma : 2\pi + e^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, circonferenza di raggio unitario centrata in $z = 2\pi$ percorsa in senso antiorario.

Esercizio 3 (4 pt)

Determinare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2 + 3n + 2)}{4} \left(\frac{z}{2}\right)^n \quad (4)$$

e calcolarne il valore di $z = 3 + i$.

Esercizio 4 (4 pt)

Si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{dx}{dt} = -ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = ax - by, \quad (5)$$

con $a > 0$, $b > 0$ e condizioni iniziali $x(0) = 1$, $y(0) = 2$. Calcolare il tempo t_* oltre il quale $|x(t) - x_*| < 10^{-3}$, dove $x_* = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$.

Esercizio 5 (6 pt)

Trovare una soluzione dell'equazione

$$\frac{d^4}{dx^4}f(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}f(x) + f(x) = (\sin x)^3 - 2 \sin 4x \quad (6)$$

con $0 \leq x \leq \pi$ e $f(0) = f(\pi) = 0$.

Esercizio 6 (6 pt)

Data l'equazione

$$\partial_t u(x, t) = D e^{-at} \partial_{xx}^2 u(x, t) \quad (7)$$

con $a > 0$ e condizione iniziale

$$u(x, 0) = e^{-x^2} \delta(x^4 - 1) \quad (8)$$

calcolare

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t). \quad (9)$$

Suggerimento: meglio evitare l'uso del propagatore.