

Esame 11 Luglio 2018

Roberto Bonciani e Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica

Dipartimento di Fisica

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Anno Accademico 2017-2018

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Bonciani-Vulpiani 11 Luglio 2018

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.

Esempio “D. Hilbert, 23011862.”

Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (6 pt)

Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{(3 + 2 \cos \theta)} d\theta$$

Esercizio 2 (5 pt)

Discutere le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^2}$$

e calcolarne l'espansione di Laurent in $z = 0$ nei settori circolari d'interesse.

Esercizio 3 (3 punti)

Trovare i valori delle costanti a , b e c per i quali

$$u(x, y) = x^2 + ay^2 + bxy + cx$$

è la parte reale di una funzione analitica e trovare la sua parte immaginaria $v(x, y)$ tale che $v(0, 0) = 0$.

Esercizio 4 (3 punti)

Data l'equazione differenziale

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + 2y + f_1, \quad \frac{dy}{dt} = -y + f_2$$

A) nel caso $f_1 = f_2 = 0$, trovare i valori di α tali che $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ per ogni condizione iniziale $x(0), y(0)$;

B) nel caso $f_1(t) = f_2(t) = e^{-2t}$, $\alpha = -1$, calcolare $x(t)$ con condizioni iniziali $x(0) = y(0) = 1$.

Esercizio 5 (6 punti)

Calcolare la funzione

$$f(x) = \int \dots \int \delta\left(\sum_{n=1}^N x_n - x\right) \prod_{n=1}^N \frac{1}{1+x_n^2} dx_n$$

per $N = 2$ e $N = 3$, e (facoltativo) generalizzare al caso N generico.**Esercizio 6** (7 punti)

Trovare la soluzione dell'equazione

$$-\frac{d^2}{dx^2}f(x) + f(x) = g(x)$$

nei casi:

A) $0 \leq x \leq \pi$, $f(0) = f(\pi) = 0$ e $g(x) = (\sin x)^3$;B) $-\infty < x < \infty$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ e

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

portare i calcoli fino in fondo solo per il caso $\sigma \rightarrow 0$.**Suggerimento 1** Serie e trasformate di Fourier.**Suggerimento 2** Qualche cosa dell' esercizio precedente è utile.