Esame 12 Settembre 2019

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2018-2019

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
12 Settembre 2019

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (5 pt)
Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)^2}\,dx\,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (5 pt)
Studiare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{z}{\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)}\,, \tag{2}$$

e nel caso di singolarità isolate calcolarne i residui.

Esercizio 3 (5 pt)
Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzionw

$$u(x,y) = e^{ax}\cos y \sin y \tag{3}$$

è la parte reale di una funzione olomorfa $f(z)$ in tutto $\mathbb{C}$. Trovare le funzioni f.

Esercizio 4 (5 pt)
Si consideri la seguente regola ricorsiva

$$x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n + \frac{1}{6}y_n \;\;,\;\; y_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{5}{6}y_n\,, \tag{4}$$

con $x_0 = 0.4$ e $y_0 = 0.6$. Si calcoli x_N con $N = 10^5$.

Esercizio 5 (5 pt)
Si considerino le funzioni $f(x)$ continue e derivabili almeno due volte nell'intervallo $[0,\pi]$, con $f(0) = f(\pi) = 0$, e

$$F_N(x,x') = \sum_{n=1}^{N}(n^2+3)\sin(nx)\sin(nx')\,, \tag{5}$$

calcolare la funzione

$$g(x) = \lim_{N\to\infty} \int_0^{\pi} f(x')F_N(x,x')dx' \,. \tag{6}$$

Si discuta il caso $f(x) = x(\pi - x)^3$.

Esercizio 6 (5 pt)
Trovare la soluzione dell'equazione

$$\partial_t f(x,t) = \Big(2 - \theta(2-t)\Big)\partial^2_{xx} f(x,t) + g(x,t) \tag{7}$$

ove $-\infty < x < \infty$ e $g(x,t) = e^{-3x^2+x}\delta(t-3)$ con condizione iniziale

$$f(x,0) = e^{-5x^2-6x} \,. \tag{8}$$

NB: $\theta(z)$ indica la funzione gradino che vale 0 se $z < 0$ e 1 se $z \geq 0$.