Esame 13 Maggio 2019

Roberto Bonciani e Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2017-2018

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Bonciani-Vulpiani 13 Maggio 2019

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (6 pt)
Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{(\cos\theta + 2)^2}\, d\theta\,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (4 pt)
Calcolare

$$\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z^2(z^2+8)}\, dz\,, \tag{2}$$

con γ quadrato di lato $L = 2$ centrato nell'origine, con i lati paralleli agli assi.

Esercizio 3 (4 pt)
Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x,y) = \cos x(e^{ay} + e^{-y}) \tag{3}$$

è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$ in tutto $\mathbb{C}$. Trovare le funzioni f.

Esercizio 4 (6 pt)
$\mathbf{A}$ è una matrice 3x3 con elementi

$$A_{ii} = \alpha\ ,\ A_{ij} = 1\ se\ j > i\ ,\ A_{ij} = 0\ se\ j < i\ ,$$

con α reale. Si trovi la soluzione dell'equazioni differenziale

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}\ \ ,\ \ \mathbf{x} \in R^3$$

con condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = (1, 0, -1)$.

Esercizio 5 (5 pt)
Sia $\mathbf{x} = (x_0, x_1, ..., x_{N-1})$ un vettore con componenti complesse, e $\mathbf{F}$ l'operatore lineare che trasforma $\mathbf{x}$ in $\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x}$ nel modo seguente

$$u_k = \sum_{n=0}^{N-1} F_{kn} x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} x_n\ ,\ k = 0, 1, 2, ..., N-1$$

ove $i = \sqrt{-1}$, mostrare che $\mathbf{F}$ è un operatore unitario e calcolare $\mathbf{F}^{-1}$, cioè la matrice $(F^{-1})_{kn}$.

Esercizio 6 (5 pt)
Trovare la soluzione per $t > 0$ dell'equazione

$$\partial_t u(x,t) = \partial^2_{xx} u(x,t)$$

ove $0 \leq x \leq 3$, con condizioni al bordo

$$u(0,t) = 0 \ , \ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=3} = 0\,,$$

e condizione iniziale

$$u(x,0) = 4\sin\frac{\pi x}{2} - 3\sin\frac{5\pi x}{6}.$$