Esame 13 Settembre 2018

Roberto Bonciani e Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2017-2018

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Bonciani-Vulpiani 13 Settembre 2018

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (6 pt)
Calcolare il seguente integrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\log(x)}{x^2+1}\,dx\,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (4 pt)
Data la funzione

$$f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right),$$

1. se ne individuino e classifichino le singolarità nel piano complesso (compreso il punto all'infinito);
2. se ne determini lo sviluppo di Laurent in $z = 0$;
3. se ne calcoli il residuo all'infinito.

Esercizio 3 (4 punti)
Calcolare il seguente integrale

$$I = \int_{C_R} \frac{\log(z+3)}{z^2\sqrt{z+2}}\,, \tag{2}$$

dove C_R è la circonferenza centrata in $z = 0$ con raggio $R = 1$ percorsa in senzo antiorario, utilizzando, giustificandola, la formula integrale di Cauchy.

Esercizio 4 (4 punti)
Data l'equazione differenziale

$$\frac{dx_n}{dt} = \sum_{k=1}^{N} A_{nk}x_k + f_n\,, \quad n = 1, 2, ..., N \tag{3}$$

dove $A_{ij} = 1$ per ogni coppia (i, j) e $f_i = 1$, scrivere $\mathbf{x}(t)$ a partire dalla condizione iniziale $x_i(0) = 1/N$.
Suggerimento Studiare prima il caso con $f_i = 0$.

Esercizio 5 (5 punti)
Calcolare la funzione

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} (y-x) e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}} dy\,. \tag{4}$$

Suggerimento Usare le proprietà della trasformata di Fourier di $xg(x)$ e di $dg(x)/dx$.

Esercizio 6 (7 punti, $[2+5]$)
Data la funzione

$$f(\theta) = \frac{1+\cos(\theta)}{3+2\cos(\theta)} \tag{5}$$

e i suoi coefficienti di Fourier

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{in\theta}\, d\theta \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{6}$$

1. mostrare che per $n \gg 1$, f_n decade a zero più velocemente di n^{-m} per ogni valore di $m > 0$;
2. calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f_{n+1}|}{|f_n|}\,. \tag{7}$$

Suggerimento Si pensi alla $f(\theta)$ come serie di Laurent rispetto alla variabile $z = e^{i\theta}$.