Esame 15 Novembre 2018

Roberto Bonciani e Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2017-2018

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Bonciani-Vulpiani 15 Novembre 2018

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (6 pt)
Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{x^2 - 2x + 2}\, dx\,, \quad \text{con } k \in R \tag{1}$$

Esercizio 2 (4 pt)
Si studino le singolarità nel piano complesso (compreso il punto all'infinito) della funzione

$$f(z) = \frac{1+z}{z^3 + 3z} \tag{2}$$

e svilupparla in serie di Laurent in $z = 0$ nei settori circolari d'interesse.

Esercizio 3 (4 pt)
La funzione di $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ nel segmento $y = 0$, $3.2 \leq x \leq 3.8$ vale

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{x}\right)^n\,,\ v(x,0) = 0\,. \tag{3}$$

Calcolare, spiegando le basi teoriche della procedura, $f(z)$ nel punto $z = 5 + i8$.

Esercizio 4 (5 pt)
Si considerino le funzioni $f(x)$ continue e derivabili nell'intervallo $[0,\pi]$, $f(0) = f(\pi) = 0$ e

$$F_N(x,x') = \sum_{n=1}^{N} \sin(nx)\sin(nx')\,. \tag{4}$$

Mostrare che

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{\pi} f(x')F_N(x,x')dx' = Cf(x)\,, \tag{5}$$

e calcolare C.

Esercizio 5 (5 pt)
$\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ sono matrici diverse $N \times N$ tali che

$$\mathbf{A}_1^2 = c_1 \mathbf{A}_1 \ , \ \ \mathbf{A}_2^2 = c_2 \mathbf{A}_1 \ , \ \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \ , \tag{6}$$

calcolare, in termini di $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ la matrice $exp[\mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2]$

Esercizio 6 (6 pt)
Trovare la soluzione dell'equazione

$$\partial_t f(x,t) = -\partial^4_{xxxx} f(x,t) + g(x) \tag{7}$$

ove $f(0,t) = f(\pi,t) = 0$, $g(x) = \sin(3x)$ e

$$f(x,0) = (sinx)^3 \, . \tag{8}$$