

# Esame 18 Febbraio 2020

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

*Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica*

*Dipartimento di Fisica*

*Università degli Studi di Roma "La Sapienza"*

*Anno Accademico 2018-2019*

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica  
18 Febbraio 2020

**NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.**

**Esempio “D. Hilbert, 23011862.”**

**Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.**

**Esercizio 1 (5 pt)**

Calcolare, con tecniche di analisi complessa, il seguente integrale

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x^4 - 1)} dx. \quad (1)$$

**Esercizio 2 (5 pt)**

Discutere le divergenze della funzione

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \sin\left(\frac{\pi}{z}\right) \quad (2)$$

e la convergenza della serie di Laurent in  $z = 0$ . In particolare calcolarne il coefficiente  $c_{-1}$ .

**Esercizio 3 (5 pt)**

La funzione analitica  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  sul segmento  $y = 0$ ,  $-1.5 < x < 1.5$  vale

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x}{2}\right)^{(n-1)}. \quad (3)$$

trovare  $f(z)$  per  $z = 3 + i$ , spiegando la procedura.

**Esercizio 4 (5 pt)**

Si consideri la seguente regola ricorsiva

$$x_{n+1} = ax_n + ay_n + b^n, \quad y_{n+1} = ax_n + ay_n + c^n, \quad (4)$$

ove  $a, b$  e  $c$  sono reali,  $x_0 = 1, y_0 = 5$  si calcoli  $x_{1000}$ .

**Esercizio 5** (5 pt)

Trovare la soluzione dell'equazione

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - C^2 f(x) = 2\delta(x - 3) \quad (5)$$

con  $C$  reale e  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

**Esercizio 6** (5 pt)

Data l'equazione

$$\partial_t u(x, t) = D(t) \partial_{xx}^2 u(x, t) \quad (6)$$

con  $D(t) = e^{-t}$ ,  $-\infty < x < \infty$  e condizione iniziale  $u(x, 0) = e^{-2x^2+3x}$ , calcolare  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ .