Esame 18 Giugno 2019

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2018-2019

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
18 Giugno 2019

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (6 pt)
Calcolare il seguente integrale
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{(\sin\theta + 2)}\, d\theta\,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (4 pt)
Calcolare
$$\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z^2(z^2+8)}\, dz\,, \tag{2}$$
con γ quadrato di lato $L = 2$ centrato nell'origine, con i lati paralleli agli assi, percorso in senso antiorario.

Esercizio 3 (4 pt)
Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione
$$u(x, y) = \cos x(e^{ay} + e^{-y}) \tag{3}$$
è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$ in tutto $\mathbb{C}$. Trovare le funzioni f.

Esercizio 4 (4 pt)
Data l'equazione differenziale
$$\frac{dx_n}{dt} = \sum_{k=1}^{N} A_{nk} x_k + f_n \ \ , \ \ n = 1, 2, ..., N \tag{4}$$
ove $A_{ij} = 1$ per ogni coppia (i, j) e $f_i = 1$ scrivere $\mathbf{x}(t)$ a partire dalla condizione iniziale $x_i(0) = 1/N$.

Esercizio 5 (6 pt)
Data la funzione
$$f(\theta) = \frac{1 + \cos(\theta)}{3 + 2\cos(\theta)} \tag{5}$$

e i sui coefficienti di Fourier

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{in\theta}\, d\theta \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{6}$$

calcolare

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|f_{n+1}|}{|f_n|} \tag{7}$$

Suggerimento Si pensi alla $f(\theta)$ come serie di Laurent rispetto alla variabile $z = e^{i\theta}$.

Esercizio 6 (6 pt)
Data l'equazione

$$\partial_t u(x,t) = D \partial_{xx}^2 u(x,t) + 2e^{-x^2} \delta\Big(t^2 - 2t + \frac{3}{4}\Big) \tag{8}$$

con $-\infty < x < \infty$ e condizione iniziale $u(x,0) = e^{-2x^2}$, calcolare $u(x,t)$.