

# Esame 20 Gennaio 2020

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

*Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica*

*Dipartimento di Fisica*

*Università degli Studi di Roma "La Sapienza"*

*Anno Accademico 2018-2019*

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica  
20 Gennaio 2020

**NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.**

**Esempio “D. Hilbert, 23011862.”**

**Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.**

**Esercizio 1** (5 pt)

Calcolare, con tecniche di analisi complessa, il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)} dx. \quad (1)$$

**Esercizio 2** (5 pt)

Studiare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 4} \quad (2)$$

e calcolarne i residui al finito e all'infinito.

**Esercizio 3** (5 pt)

Determinare per quali valori del parametro  $a \in \mathbb{R}$  la funzione

$$u(x, y) = \cos x(e^{ay} + e^{-y}) \quad (3)$$

è la parte reale di una funzione analitica  $f(z)$  e trovare tali funzioni.

**Esercizio 4** (5 pt)

$\mathbf{A}$  è una matrice  $3 \times 3$  con elementi

$$A_{ii} = 1, \quad A_{ij} = 2 \text{ se } j > i, \quad A_{ij} = 0 \text{ se } j < i. \quad (4)$$

Si trovi la soluzione dell'equazioni differenziale

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (5)$$

con condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 2)$ .

**Esercizio 5** (5 pt)

Sia  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  un vettore con componenti complesse, e  $\mathbf{F}$  l'operatore lineare che trasforma  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x}$  nel modo seguente

$$u_k = \sum_{n=0}^{N-1} F_{kn} x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} x_n, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (6)$$

ove  $i = \sqrt{-1}$ , mostrare che  $\mathbf{F}$  è un operatore unitario e calcolare  $\mathbf{F}^{-1}$ , cioè la matrice  $(F^{-1})_{kn}$ .

**Esercizio 6** (5 pt)

Trovare la soluzione per  $t > 0$  dell'equazione

$$\partial_t u(x, t) = \partial_{xx}^2 u(x, t), \quad (7)$$

ove  $0 \leq x \leq 3$ , con condizioni al bordo

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=3} = 0 \quad (8)$$

e condizione iniziale

$$u(x, 0) = -3 \sin \frac{\pi x}{2} + 2 \sin \frac{5\pi x}{6}. \quad (9)$$