

Esame 20 Gennaio 2020

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica

Dipartimento di Fisica

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Anno Accademico 2018-2019

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
20 Gennaio 2020

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.

Esempio “D. Hilbert, 23011862.”

Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (5 pt)

Calcolare, con tecniche di analisi complessa, il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)} dx. \quad (1)$$

Esercizio 2 (5 pt)

Studiare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 4} \quad (2)$$

e calcolarne i residui al finito e all'infinito.

Esercizio 3 (5 pt)

Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x, y) = \cos x(e^{ay} + e^{-y}) \quad (3)$$

è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$ e trovare tali funzioni.

Esercizio 4 (5 pt)

\mathbf{A} è una matrice 3×3 con elementi

$$A_{ii} = 1, \quad A_{ij} = 2 \text{ se } j > i, \quad A_{ij} = 0 \text{ se } j < i. \quad (4)$$

Si trovi la soluzione dell'equazioni differenziale

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (5)$$

con condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 2)$.

Esercizio 5 (5 pt)

Sia $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ un vettore con componenti complesse, e \mathbf{F} l'operatore lineare che trasforma \mathbf{x} in $\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x}$ nel modo seguente

$$u_k = \sum_{n=0}^{N-1} F_{kn} x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} x_n, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (6)$$

ove $i = \sqrt{-1}$, mostrare che \mathbf{F} è un operatore unitario e calcolare \mathbf{F}^{-1} , cioè la matrice $(F^{-1})_{kn}$.

Esercizio 6 (5 pt)

Trovare la soluzione per $t > 0$ dell'equazione

$$\partial_t u(x, t) = \partial_{xx}^2 u(x, t), \quad (7)$$

ove $0 \leq x \leq 3$, con condizioni al bordo

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=3} = 0 \quad (8)$$

e condizione iniziale

$$u(x, 0) = -3 \sin \frac{\pi x}{2} + 2 \sin \frac{5\pi x}{6}. \quad (9)$$