Esame 21 Gennaio 2019

Roberto Bonciani e Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2017-2018

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Bonciani-Vulpiani 21 Gennaio 2019

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (6 pt)
Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{(1+e^x)\cosh(x)}\, dx\,, \quad 0 < a < 1\,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (4 pt)
Determinare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = (1+z^2)^z\,. \tag{2}$$

Nel caso di funzioni polidrome, considerare il ramo principale.

Esercizio 3 (4 pt)
Si consideri la funzione analitica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Sulla retta reale $y = 0$, si ha

$$u(x,0) = (\sin x)^2\,, \quad v(x,0) = 0\,. \tag{3}$$

Calcolare, spiegando le basi teoriche della procedura, $f(z)$ nel punto $z = 5 + i8$.

Esercizio 4 (6 pt)
Si considerino le funzioni $f(x)$ continue e derivabili nell'intervallo $[0,\pi]$, $f(0) = f(\pi) = 0$ e

$$F_N(x,x') = \sum_{n=1}^{N} \sin(nx)\sin(nx')\,. \tag{4}$$

Mostrare che

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{\pi} f(x')F_N(x,x')dx' = Cf(x)\,, \tag{5}$$

e calcolare C.

Esercizio 5 (4 pt)
Data l'equazione differenziale

$$\frac{dx}{dt} = -x + a\sum_{n=1}^{\infty} \delta(t-n) \tag{6}$$

con condizione iniziale $x(0)$, si calcoli $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$ ove x_n è $x(t)$ ad un tempo leggermente maggiore di $t = n$

$$x_n = \lim_{\epsilon\to 0^+} x(n+\epsilon) \ . \tag{7}$$

Suggerimento: si scriva x_n in termini di x_{n-1}.

Esercizio 6 (6 pt)
Trovare la soluzione dell'equazione

$$\partial_t f(x,t) = \partial^2_{xx} f(x,t) + g(x,t) \tag{8}$$

ove $\lim_{t\to\pm\infty} f(x,t) = 0$, $g(x,t) = \delta(t-1)e^{-2x^2}$ e

$$f(x,0) = e^{-x^2} \ . \tag{9}$$