Esame 25 Gennaio 2021

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2019-2020

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
25 Gennaio 2021 – in remoto

Esercizio 1 (9 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2(x)}{(x^2+1)} \,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (6 pt)
Determinare la regione di convergenza della serie

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{x}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^k \,. \tag{2}$$

Se la funzione di variabile complessa $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ è determinata sul segmento $y = 0$, $1.2 < x < 1.9$ dalla condizione

$$u(x,0) = g(x) \,, \quad v(x,0) = 0 \,, \tag{3}$$

calcolarne il valore in $z = i$.

Esercizio 3 (6 pt)
Si trovi la soluzione $\mathbf{x}(t)$ per $t > 0$ dell'equazioni differenziale

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \,, \tag{4}$$

ove $\mathbf{A}$ è la matrice 3×3 i cui elementi sono $A_{ji} = 1$ er ogni (i,j) e condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = (1,0,2)$.

Esercizio 4 (9 pt)
Trovare la $f(x)$ tale che $f(x) \to 0$ per $|x| \to \infty$, che soddisfa l'equazione

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(z)\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\delta(x-y-z-t)\,dy\,dz\,dt = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \ \ ,\sigma \geq 1 \tag{5}$$

Soluzione Es. 1

Si può procedere come segue. Si ha

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\,, \tag{6}$$

da cui

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right)\,. \tag{7}$$

L'integrale diventa

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)} + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{(x^2+1)} + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ix}}{(x^2+1)}\,. \tag{8}$$

Passando all'integrazione in $\mathbb{C}$, consideriamo:

$$J_1 = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} \frac{dz}{(z^2+1)}\,,\quad J_2 = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} \frac{e^{2iz}}{(z^2+1)}\,,\quad J_3 = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_3} \frac{e^{-2iz}}{(z^2+1)}\,, \tag{9}$$

dove $z^2+1 = (z+i)(z-i)$ e dove γ_1 è costituito dal segmento $-R < x < R$ e dalla semicirconferenza e^{it}, $0 < t < \pi$, mentre γ_3 è costituito dal segmento $-R < x < R$ e dalla semicirconferenza e^{it}, $0 < t < -\pi$ (cioè la semicirconferenza nel semipiano inferiore, percorsa in senso orario).

Siccome sulle semicirconferenze

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+1}\,d\theta = 0\,, \tag{10}$$

e analogamente per gli altri due integrali, per i quali vale il lemma di Jordan, si ha

$$I_1 = J_1 = 2\pi i\left[\frac{1}{2}Res\left(\frac{1}{(z^2+1)}, i\right)\right] = \frac{\pi}{2}\,, \tag{11}$$

$$I_2 = J_2 = 2\pi i\left[\frac{1}{4}Res\left(\frac{e^{2iz}}{(z^2+1)}, i\right)\right] = \frac{\pi}{4e^2}\,, \tag{12}$$

$$I_3 = J_3 = -2\pi i\left[\frac{1}{4}Res\left(\frac{e^{-2iz}}{(z^2+1)}, -i\right)\right] = \frac{\pi}{4e^2}\,. \tag{13}$$

In totale:

$$I = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1+e^2}{e^2}\right)\,. \tag{14}$$

Soluzione Es. 2

La $g(x)$ è data dalla somma di due serie geometriche: una converge per $x > 1$ e la seconda per $x < 2$. Quindi la somma delle due serie converge nel segmento $1 < x < 2$.

Per passare alla continuazione analitica della $f(z)$ conviene risommare le serie per poi trovare agevolmente la funzione $f(z)$. Si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{x}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^k &= 2\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^k \qquad (15)\\
&= \frac{d}{dx}\frac{2}{1-\frac{x}{2}} + 1 - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^k, \qquad (16)\\
&= \frac{4}{(2-x)^2} + \frac{1}{1-x}. \qquad (17)
\end{aligned}$$

I due punti $z = 1$ e $z = 2$ sono singolarità polari per la $f(z)$, che si può trovare come continuazione analitica in tutto $\mathbb{C} - \{1, 2\}$ dalla condizione sul segmento:

$$f(z) = \frac{4}{(2-z)^2} + \frac{1}{1-z}. \qquad (18)$$

In $z = i$ abbiamo

$$f(i) = \frac{49 + 57i}{50}. \qquad (19)$$

Soluzione Es. 3

Ovviamente

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{x}(0)$$

ove

$$\mathbf{B}(t) = e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mathbf{A}^n$$

notando che la matrice $\mathbf{A}$ è proporzionale ad un proiettore, infatti

$$\mathbf{A}^2 = 3\mathbf{A},\ \mathbf{A}^3 = 3^2\mathbf{A}, ...,\ \mathbf{A}^n = 3^{n-1}\mathbf{A} = \frac{1}{3}3^n\mathbf{A}$$

si ha facilmente

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{I} + \frac{e^{3t}-1}{3}\mathbf{A}$$

Soluzione Es. 4

Integrando su y e z si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

ove

$$G(x) = (f * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy\,.$$

Usando il teorema di convoluzione due volte e le proprietà della trasformata di Fourier della gaussiana si ha, per $\sigma > 1$

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}{\sqrt{2\pi a^2}}$$

ove

$$a^2 = \frac{\sigma^2 - 1}{2}$$

mentre per $\sigma = 1$

$$f(x) = \delta(x)\,.$$

Se $\sigma < 1$ non si ha soluzione.
Per chi conosce un po' di probabilità il risultato è ovvio; la somma di 3 variabile gaussiane indipendenti è una variabile gaussiana la cui varianza è la somma delle 3 varianze: $a^2 + a^2 + 1 = \sigma^2$.