

Esame 26 Giugno 2018

Roberto Bonciani e Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica

Dipartimento di Fisica

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Anno Accademico 2017-2018

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Bonciani-Vulpiani 26 Giugno 2018

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. **SCRIVERE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.**

Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (6 pt)

Calcolare il seguente integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - x + 1} dx. \quad (1)$$

Esercizio 2 (5 pt)

Calcolare la parte principale di Laurent in $z = 0$ della seguente funzione

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 \sin z}. \quad (2)$$

Esercizio 3 (3 pt)

Data la funzione

$$u(r, \theta) = r \cos \theta \quad (3)$$

dimostrare che tale funzione è la parte reale di una funzione analitica e trovare la sua parte immaginaria $v(r, \theta)$ tale che $v(r, 0) = 0$.

Esercizio 4 (5 pt)

Si trovi la soluzione del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + f \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases} \quad (4)$$

1. nel caso $f \equiv 0$ e $x(0) = y(0) = 1$;

2. nel caso

$$f = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases} \quad (5)$$

e $x(0) = y(0) = 0$.

Esercizio 5 (7 pt)

Trovare la soluzione $u(x, t)$ della seguente equazione differenziale alle derivate parziali

$$\partial_t u = D \partial_{x,x}^2 u + f(x) \quad -\infty < x < \infty, \quad (6)$$

in cui

$$f(x) = \frac{d^2}{dx^2} e^{-ax^2} \quad (7)$$

e

$$u(x, 0) = e^{-ax^2}. \quad (8)$$

Esercizio 6 (4 pt)

Data l'equazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma}} f(x-y) dy = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (9)$$

trovare la soluzione $f(x)$ tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx < \infty \quad (10)$$

e discutere per quali valori di σ tale soluzione esiste.