

# Esame 26 Giugno 2018

Roberto Bonciani e Angelo Vulpiani

*Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica*

*Dipartimento di Fisica*

*Università degli Studi di Roma "La Sapienza"*

*Anno Accademico 2017-2018*

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica  
Bonciani-Vulpiani 26 Giugno 2018

**NOTA:** Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.

Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

**Esercizio 1** (6 pt)

Calcolare il seguente integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - x + 1} dx. \quad (1)$$

**Esercizio 2** (5 pt)

Calcolare la parte principale di Laurent in  $z = 0$  della seguente funzione

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 \sin z}. \quad (2)$$

**Esercizio 3** (3 pt)

Data la funzione

$$u(r, \theta) = r \cos \theta \quad (3)$$

dimostrare che tale funzione è la parte reale di una funzione analitica e trovare la sua parte immaginaria  $v(r, \theta)$  tale che  $v(r, 0) = 0$ .

---

**Esercizio 4** (5 pt)

Si trovi la soluzione del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + f \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases} \quad (4)$$

1. nel caso  $f \equiv 0$  e  $x(0) = y(0) = 1$ ;

2. nel caso

$$f = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases} \quad (5)$$

e  $x(0) = y(0) = 0$ .

**Esercizio 5** (7 pt)

Trovare la soluzione  $u(x, t)$  della seguente equazione differenziale alle derivate parziali

$$\partial_t u = D \partial_{x,x}^2 u + f(x) \quad -\infty < x < \infty, \quad (6)$$

in cui

$$f(x) = \frac{d^2}{dx^2} e^{-ax^2} \quad (7)$$

e

$$u(x, 0) = e^{-ax^2}. \quad (8)$$

**Esercizio 6** (4 pt)

Data l'equazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma}} f(x-y) dy = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (9)$$

trovare la soluzione  $f(x)$  tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx < \infty \quad (10)$$

e discutere per quali valori di  $\sigma$  tale soluzione esiste.