Esame 27 Novembre 2019

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2018-2019

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
27 Novembre 2019

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (5 pt)
Calcolare, con tecniche di analisi complessa, il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\, dx\,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (5 pt)
Studiare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}\,, \tag{2}$$

e trovare lo sviluppo di Taylor (e il suo raggio di convergenza) in $z = 0$.

Esercizio 3 (5 pt)
Sia

$$u(x,y) = e^{2y}(2\sin^2 x - 1)\,. \tag{3}$$

Verificare che $u(x,y)$ è armonica in $\mathbb{R}^2$ e determinare una funzione $v(x,y)$ armonica coniugata di u.

Esercizio 4 (5 pt)
Dato lo spazio vettoriale di dimensioni $2N+1$ delle funzioni in $[0,\pi]$ della forma

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx)\,, \tag{4}$$

a cui corrisponde il vettore

$$\mathbf{v} = (a_0, a_1, a_2, ..., a_N, b_1, b_2, ..., b_N)\,. \tag{5}$$

Scrivere la matrice $\mathbf{A}$ che rappresenta l'operatore derivata e la matrice $\mathbf{B}$ che rappresenta l'operatore derivata seconda.
Calcolare la matrice

$$\mathbf{C}(r) = e^{r\mathbf{A}}\,. \tag{6}$$

Volendo ci si può limitare al caso $N = 2$.
Suggerimento: per chiarirsi le idee, ed evitare di fare troppo calcoli, cominciare considerando il caso con r piccolo.

Esercizio 5 (5 pt)
Data la regola di ricorrenza

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \ , \ \ y_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}y_n \, , \tag{7}$$

con $x_0 = y_0 = 1$ calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} \, . \tag{8}$$

Discutere il caso con x_0 e y_0 arbitrari.

Esercizio 6 (5 pt)
Data l'equazione

$$\partial_t f(x,t) = \frac{1}{(t+1)^\alpha} \partial^2_{xx} f(x,t) \, , \tag{9}$$

con condizione iniziale:

$$f(x,0) = e^{-x^2+6x} \tag{10}$$

trovare i valori di α tali che $\lim_{t\to\infty} f(x,t)$ è una funzione non nulla e determinare questa funzione.