Esercitazione 2

Esercizio 1 - Resistenza dell'aria
Un blocchetto di massa $m = 0.01$ Kg (10 grammi) viene appoggiato delicatamente con velocità iniziale zero su un piano inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo α. L'attrito fra blocchetto e piano è caratterizzato da coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.4$ e coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.2$. Quel blocchetto, se e quando si muove con velocità v, subisce una forza di resistenza dell'aria proporzionale alla sua velocità istantanea ($f_{res} = -\beta v$) con coefficiente $\beta = 10^{-4}$ Kg s^{-1}. Determinare il moto del blocchetto per $\alpha = \pi/10$ e $\alpha = \pi/8$.

Soluzione

Considero un sistema di riferimento con origine nella posizione iniziale del blocchetto e l'asse x parallelo al piano inclinato. Considerando le proiezioni delle forze sui due assi si ottiene:

$$\begin{array}{ll} x: & ma_x = mg\sin\alpha - F_A \\ y: & R_N - mg\cos\alpha = 0 \end{array}$$

dove R_N è la reazione vincolare del piano e F_A la forza di attrito. Dalla seconda equazione si ricava $R_N = mg\cos\alpha$ e quindi, sostituendo nella prima:

$$ma_x = mg\sin\alpha - \mu_s mg\cos\alpha$$

Il blocchetto inizia a scivolare lungo il piano se $a_x > 0$, ovvero se

$$\alpha > \arctan\mu_s \simeq 0.38$$

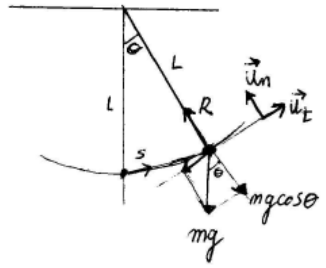
Allora il blocchetto si muove solo nel caso $\alpha = \pi/8$. In questo caso l'equazione del moto lungo l'asse x è $ma_x = mg\sin\alpha - \mu_d mg\cos\alpha - \beta v$, che ammette come soluzione $v(t) = v_\infty(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t})$ con $v_\infty = \frac{mg}{\beta}(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)$.
Si ricava infine:

$$x(t) = v_\infty t - \frac{mv_\infty}{\beta}(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t})$$

Esercizio 2 - Pendolo semplice

Una particella di massa m è attaccata a un sostegno rigido tramite un filo inestensibile (o un'asta) di massa trascurabile e lunghezza L. Il sistema, spostato dalla posizione di equilibrio e abbandonato con velocità iniziale nulla, si muove sotto l'azione della forza peso della particella. Scrivere l'equazione del moto e la legge oraria della particella per piccole oscillazioni, cioè, per piccoli valori dell'angolo θ, per cui è valida l'approssimazione $\sin\theta = \theta$. Si assuma, per semplicità, che non agiscano attriti dovuti all'aria o allo sfregamento nel punto di attacco del filo.

Soluzione



Scomponendo il moto lungo gli assi radiale r e tangenziale s alla traiettoria circolare, le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} ma_s = m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\theta \\ ma_r = m \cdot \frac{1}{L}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = R - mg\cos\theta \end{cases}$$

La seconda equazione permette di ricavare un'espressione per la tensione R del filo, imponendo $a_r = 0$. Sostituendo nella prima equazione $s = L\theta$ e approssimando $\sin\theta \simeq \theta$ si ottiene l'equazione del moto per le piccole oscillazioni:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

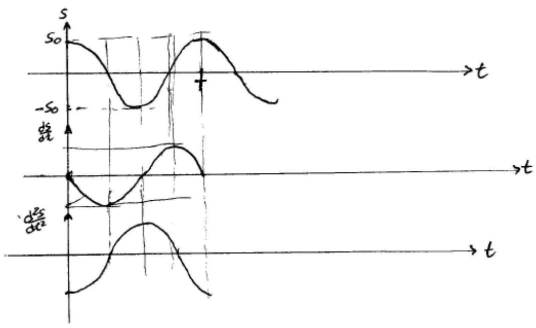
che è l'equazione del moto di un oscillatore armonico semplice, la cui soluzione è:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

con $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$. Il periodo delle piccole oscillazioni del pedolo è quindi

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Tornando alla variabile s, se $s(t=0) = s_0 = L\theta_0$ si ottiene $\varphi = 0$. In questo caso particolare, posizione, velocità ed accelerazione del pendolo sono rappresentati in funzione del tempo nei grafici qui sotto.

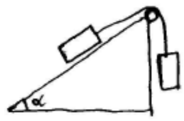


Esercizio 4 - Piano inclinato, attrito

Due masse $m_1 = 5$ kg ed $m_2 = 10$ kg sono collegate come in figura. Il piano, inclinato di $\alpha = 30°$, è scabro con coefficienti di attrito statico $\mu_s = 0.5$ e dinamico $\mu_d = 0.3$. Determinare se le due masse, inizialmente in quiete, si muovono ed in caso affermativo con quale accelerazione.

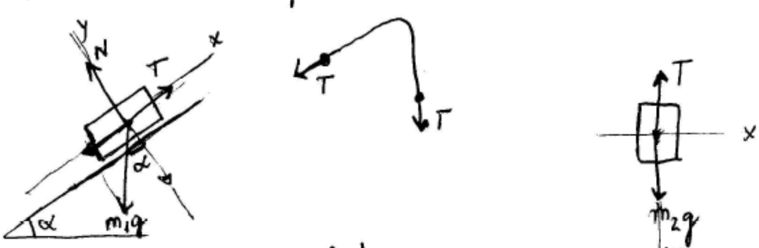
Soluzione

4



i) Consideriamo che non c'è attrito

i.i) Il sistema è in equilibrio statico



Corpo 1 Corda Corpo 2

asse x: $T - m_1 g \, sen\, \alpha_0 = 0$ (1)

asse y: $N - m_1 g \cos \alpha_0 = 0$ (2)

reazione del piano sul corpo

asse x: non ci sono forze

asse y: $m_2 g - T = 0$ (3)

$(1) + (3) \rightarrow m_1 \, sen\, \alpha_0 = m_2 \rightarrow \boxed{sen\, \alpha_0 = \frac{m_2}{m_1}}$ $m_2 < m_1$

(se non non c'è equilibrio)

se $m_2 = m_1 \rightarrow \alpha_0 = \frac{\pi}{2}$

i.ii) Il sistema si muove con accelerazione a $(\alpha \neq \alpha_0)$

$(1') \rightarrow T - m_1 g \, sen\, \alpha = m_1 a$

$(2') \rightarrow N - m_1 g \cos\alpha = 0$

$(3')\ m_2 g - T = m_2 a$

Per come abbiamo scelto gli assi, l'accelerazione del corpo 2 è uguale a quella del corpo 1, ma potrebbero avere un segno oposto se avessimo scelto gli assi in un altro modo.

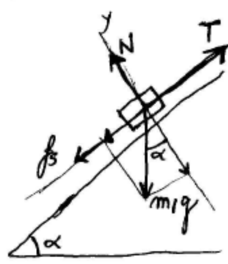
$(1') + (3') \rightarrow m_2 g - m_1 g \, sen\alpha = (m_1 + m_2) a$

$a = \frac{m_2 - m_1 sen\alpha}{m_1 + m_2} g$ se $\alpha > \alpha_0 \rightarrow a < 0$ (il corpo 1 scende)

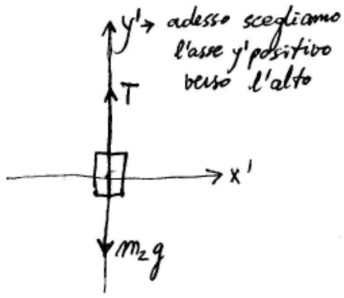
$\alpha < \alpha_0 \rightarrow a > 0$ (il corpo 1 sale)

ii) Consideriamo che c'è attrito

ii.i) Il sistema è in equilibrio statico



Corpo 1



Corpo 2

osse x: $T - m_1 g \, sen\alpha - f_s = 0$ (1)

in realtà non sapiamo il verso di f_s potrebbe essere il contrario, quindi

$-\mu_s N \leq f_s \leq \mu_s N$

($f_s > 0$ se è direto verso il basso)

asse y: $N - m_1 g \cos\alpha = 0$ (2)

asse x': non ci sono forze

asse y': $T - m_2 g = 0$ (3)

(1)+(3) → $m_1 g \, sen\,\alpha + f_s = m_2 g$ → $f_s = (m_2 - m_1 \, sen\,\alpha) g$

Nel nostro caso, con $m_1 = 5\,kg$, $m_2 = 10\,kg$, $\alpha = 30°$ →

$f_s = +73{,}58\,N$ → questo è il valore che dovrebbe avere f_s per equilibrare il sistema.

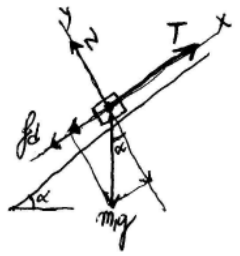
Ma sapiamo che

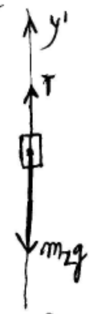
$$\left.\begin{array}{l} -\mu_s N \leq f_s \leq \mu_s N \\ (2) \to N = m_1 g \cos\alpha \end{array}\right\} -\mu_s m_1 g \cos\alpha \leq f_s \leq \mu_s m_1 g \cos\alpha$$

Nel nostro caso $\mu_s m_1 g \cos\alpha = 21{,}24\,N$

Quindi la forza di attrito statico non riesce ad equilibrare il sistema e ci sarà un'accelerazione.

ii,ii) Il sistema si muove con accelerazione





Corpo 1

asse x:

$$T - m_1 g \operatorname{sen}\alpha - f_d = m_1 a \quad (1')$$

se consideriamo $f_d = \mu_d N > 0$, l'equazione (1') solo è valida per $a > 0$ (il corpo 1 sale)
Se alla fine troviamo un risultato con $a < 0$ dovremo ripetere il calcolo cambiando il segno a f_d.

asse y: $N - m_1 g \cos\alpha = 0 \qquad (2') \rightarrow N = m_1 g \cos\alpha$

Corpo 2

asse y':

$$T - m_2 g = m_2 a' \quad (3')$$

dove $a' = -a$
(se il corpo 1 sale, il 2 scende)

Se avessimo considerato l'asse y' positivo verso il basso, la eq. (3') sarebbe:

$$m_2 g - T = m_2 a'$$

con $a' = a$ (se $a > 0 \rightarrow a' > 0$)

$(1')(2') \rightarrow T - m_1 g(\operatorname{sen}\alpha + \mu_d \cos\alpha) = m_1 a$

$(3') \rightarrow T - m_2 g = -m_2 a$

$$m_2 g - m_1 g(\operatorname{sen}\alpha + \mu_d \cos\alpha) = (m_1 + m_2) a$$

$$a = \frac{m_2 - m_1(\operatorname{sen}\alpha + \mu_d \cos\alpha)}{m_1 + m_2} g$$

$$\left.\begin{matrix} m_1 = 5\,kg,\ m_2 = 10\,kg \\ \mu_d = 0{,}3,\ \alpha = 30° \end{matrix}\right\} \rightarrow \boxed{a = 4{,}055\ m/s^2}$$

Il corpo 1 sale per il piano inclinato, la direzione che avevamo considerato di f_d è corretta.

la tensione del filo sarà

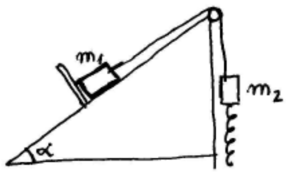
$(3') \rightarrow T = m_2(g - a) = 57{,}55\ N$

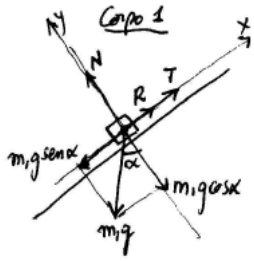
Esercizio 5 - Piano inclinato, molla

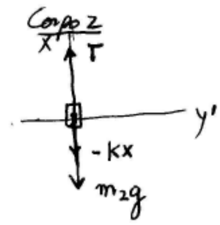
Due corpi sono collegati da un filo come in figura; le masse valgono $m_1 = 14$ kg, $m_2 = 2$ kg, l'angolo d'inclinazione del piano è $\theta = 30°$. Il corpo m_2 è anche legato al suolo da una molla di costante elastica $k = 100$ N/m e lunghezza a riposo nulla. Nella situazione della figura la lunghezza della molla è $x_0 = 0.2$ m e il sistema è in quiete perché m_1 è bloccato da un appoggio (rappresentato da una barretta grigia nel disegno). Calcolare la tensione del filo e determinare modulo direzione e verso della reazione vincolare dell'appoggio.

Soluzione

5







asse x:

$$T + R - m_1 g\,sen\,\alpha = 0 \qquad (1)$$

R è la reazione vincolare dell'appoggio che è perpendicolare a questo e parallela al piano inclinato. Non sapiamo in quale verso punta, se fosse verso il basso troveremo una soluzione $R < 0$

asse y:

$$N - m_1 g \cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

scegliamo l'asse x' verticale positivo verso l'alto ($x_0 > 0$)

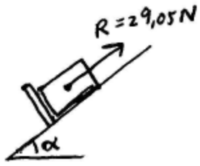
asse x':

$$T - kx - m_2 g = 0 \qquad (3)$$

asse y' → non ci sono forze

(3) → $T = kx_0 + m_2 g$ → $k = 100$ N/m, $x_0 = 0{,}2$ m, $m_2 = 2$ kg → $T = 39{,}62$ N

(1) → $R = m_1 g\,sen\,\alpha - T$ → $m_1 = 14$ kg, $\alpha = 30°$, $T = 39{,}62$ N → $\boxed{R = 29{,}05\ N}$

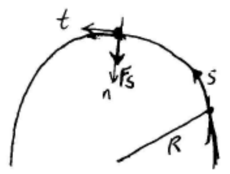


Esercizio 6 - Moto circolare, attrito

Due automobili da corsa arrivano affiancate prima di una curva semicircolare, che entrambe percorrono a velocità costante lungo due traiettorie di raggio, rispettivamente, $R_1 = 95$ m e $R_2 = 105$ m (vedi figura). Sapendo che il coefficiente di attrito statico tra ruote ed asfalto vale $\mu_s = 0.7$, si determini la massima velocità con cui ognuna delle due macchine può percorrere la curva senza slittare e quale automobile, in queste condizioni, arrivi prima al termine della curva.

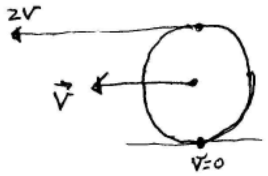
Soluzione

6)



$$m\frac{d^2s}{dt^2} = 0 \quad \text{non c'è accelerazione tangenziale}$$

$$\frac{m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{R} = F_s \quad \text{accelerazione normale (centripeta)}$$



Attrito estatico $\quad F_s \leq \mu_s N = \mu_s m g$

$$\frac{m v^2}{R} \leq \mu_s m g \rightarrow v < \sqrt{\mu_s g R}$$

Per la macchina 1 $\rightarrow v_1 \leq \sqrt{0,7 \cdot 9{,}81\,m/s^2 \cdot 95\,m} = 25,54\ m/s \quad (\simeq 91,94\ km/h)$

2 $\rightarrow v_2 \leq \sqrt{0,7 \cdot 9{,}81 \cdot 105} = 26,85\ m/s \ (= 96,67\ km/h)$

Il tempo per percorrere la curva sarà

$$t_1 = \frac{\pi R_1}{v_1} = 11,68\ s$$

$$t_2 = \frac{\pi R_2}{v_2} = 12,29\ s$$